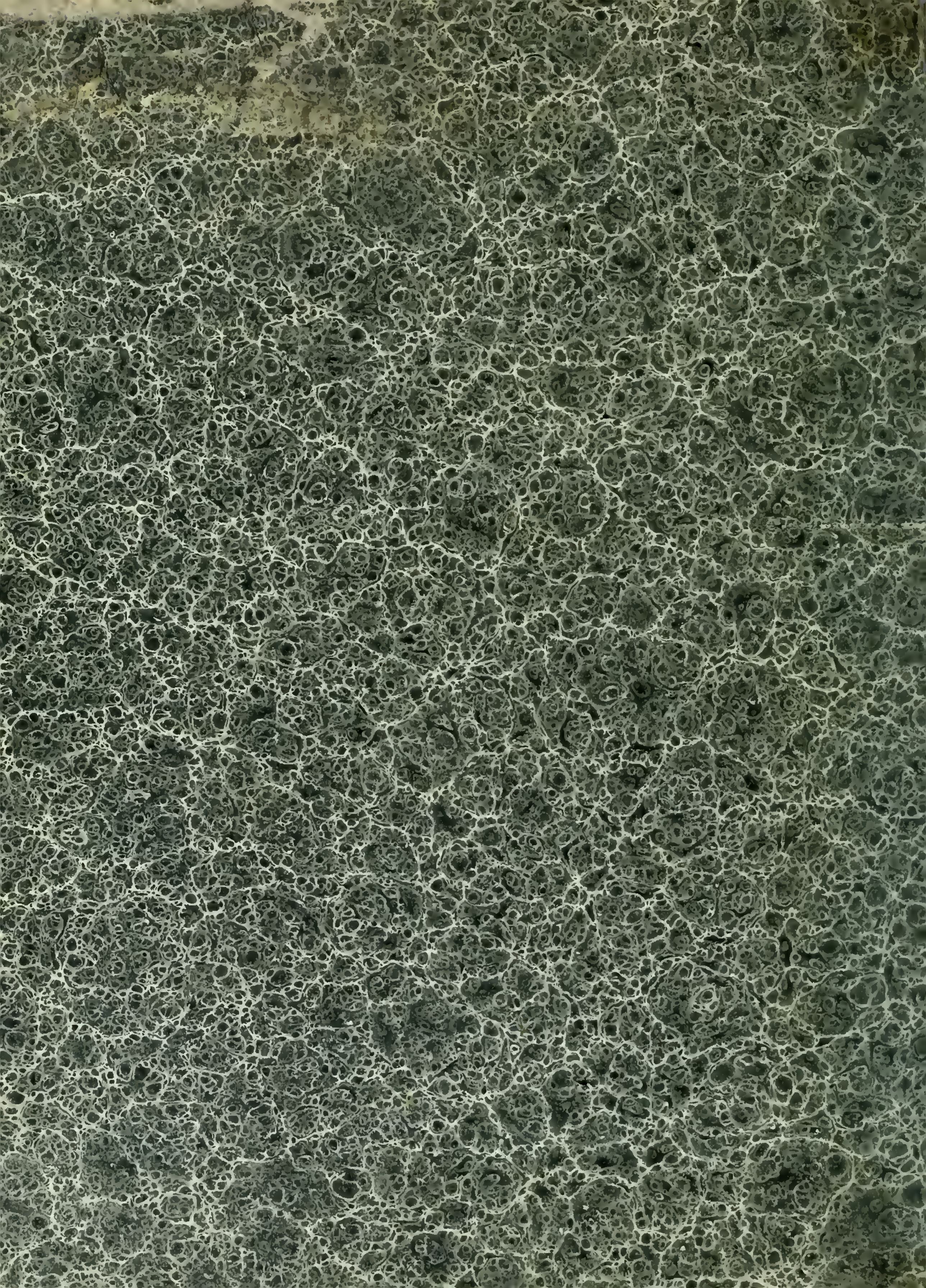
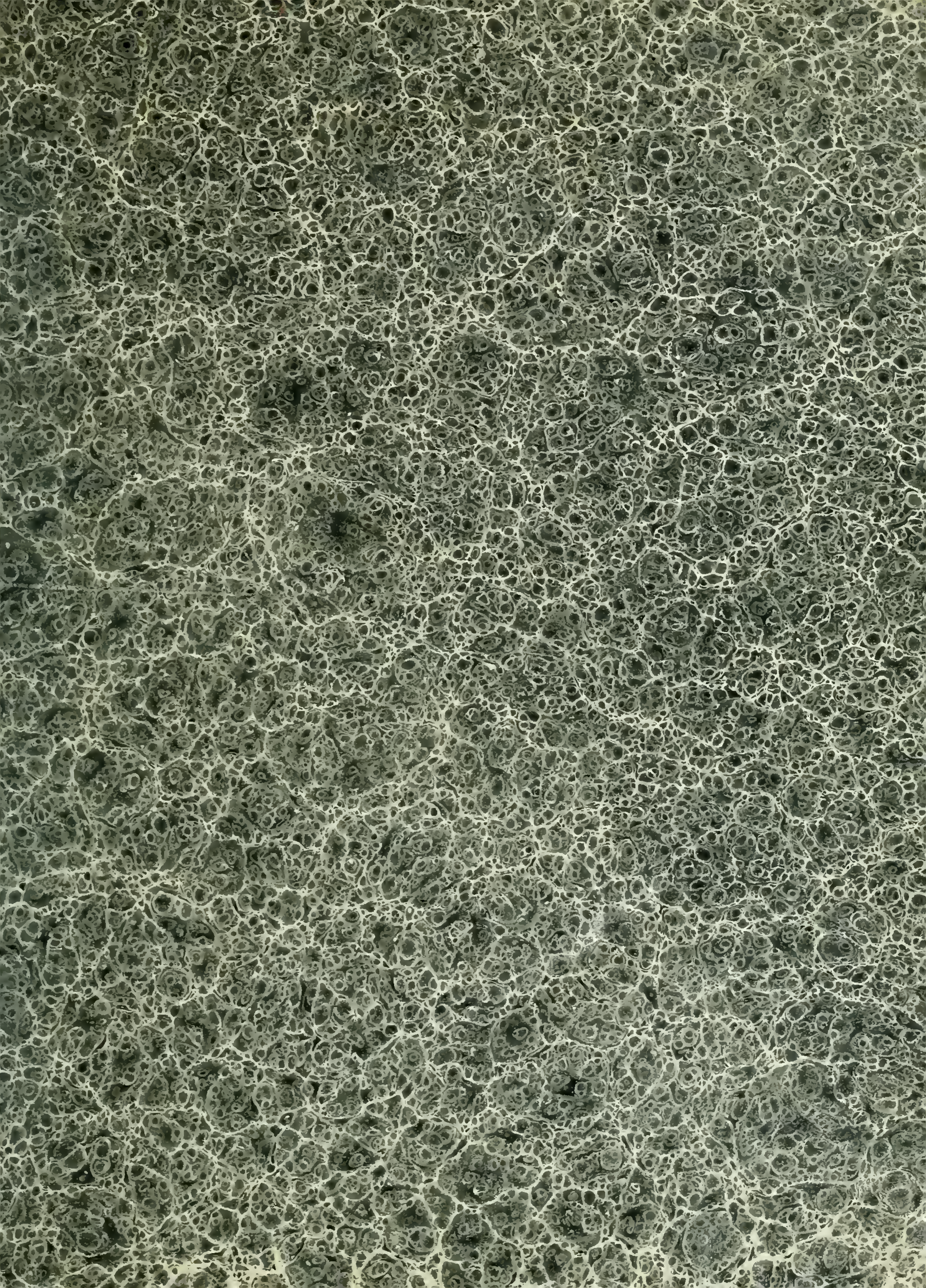

002302915047









APPLICATIONS

DU

CALCUL DIFFÉRENTIEL

A LA DISCUSSION ET A LA CONSTRUCTION

DES ÉQUATIONS DES LIGNES COURBES

ET SURFACES COURBES DU SECOND DEGRÉ,

AVEC

PLUSIEURS PROBLÈMES ET THÉORÈMES NOUVEAUX;

PAR J. B. BÉRARD,

PRINCIPAL DU COLLÉGE DE BRIANÇON, MEMBRE DE PLUSIEURS SOCIÉTÉS SAVANTES.

A TURIN,

DE L'IMPRIMERIE DE VINCENT BIANCO,

Rue du Pô, au Palais de l'Académie.

1813.



INTRODUCTION.

Construire l'équation générale du second degré à deux inconnues, c'est déterminer par rapport aux axes des coordonnées la position et la forme de la courbe représentée par cette équation.

De même, construire l'équation générale du second degré à trois inconnues, c'est déterminer par rapport aux plans coordonnés la position et la forme de la surface courbe représentée par cette équation.

Ce double problème est intéressant, non seulement comme application et exercice d'analyse, mais encore parce que les lignes et surfaces du second degré reviennent à chaque instant dans l'étude des mathématiques, et qu'il est important d'apprendre à lire dans les résultats analytiques les figures géométriques dont ils sont la représentation.

La plupart des auteurs ont traité ce sujet, mais d'une manière incomplette : ils ont employé la méthode de la transformation des coordonnées, qui n'est ni la plus courte, ni la plus simple : enfin, aucun que je sache, n'a résolu le problème pour le cas général des coordonnées obliques, et cependant il arrive souvent qu'on facilite la solution de certains problèmes en choisissant des coordonnées parallèles à des lignes obliques données de position.

En 1810 je publiai dans mes opuscules plusieurs méthodes nouvelles, dont une est fondée sur le calcul diffé-

rentiel; depuis lors, il a paru différens articles, soit dans les *Annales de Mathématiques*, soit dans la *Correspondance de l'École polythecnique*. Ces solutions, toujours restreintes aux cas particuliers des coordonnées rectangulaires, m'ont déterminé à revoir ce sujet.

J'ai publié, dans le cahier d'octobre 1812 des *Annales*, une solution pour les lignes et les surfaces qui ont un centre : cette solution, fondée sur le calcul différentiel, conduit simplement et par le chemin le plus court à des expressions irréductibles de la grandeur et de la position des diamètres principaux. Des savans distingués m'ayant invité à appliquer la même théorie aux lignes et surfaces dépourvues de centre, j'ai entrepris cette tâche : j'ai fait du tout un petit traité qui pourra faire suite aux ouvrages classiques sur les lignes et les surfaces courbes du second degré : pour ne pas dépasser les bornes que je me suis prescrites, j'ai supprimé certaines démonstrations faciles à suppléer ou qui se trouvent dans les ouvrages élémentaires. J'ai rejeté dans des notes quelques propositions épisodiques qui auraient nui à l'enchaînement du texte.

Enfin, j'ai ajouté à la suite de l'ouvrage plusieurs problèmes propres à faire voir ce que j'ai dit plus haut, savoir que des questions très-difficiles quand on emploie des coordonnées rectangulaires, deviennent faciles quand on choisit pour axes certaines lignes données de position : ces applications de ma théorie des coordonnées obliques m'ont conduit à plusieurs propositions nouvelles, à des

théorèmes assez remarquables sur les lignes et les surfaces courbes du second ordre.

Pendant que ce petit traité s'imprimait, M. *Bret* a publié (*Annales de Math.* vol. IV pag. 93) un mémoire dans lequel il traite les mêmes objets par la méthode de la transformation des coordonnées. Outre que ce mémoire ne contient pas tous les cas de l'équation générale du second degré à deux et à trois variables, le lecteur remarquera sans peine l'avantage de la méthode des *maximis* et *minimis* sur celle de M. *Bret*, tant pour la simplicité des résultats, que pour la facilité de les obtenir.

Le calcul différentiel était peut-être le seul moyen de trouver plusieurs relations simples et remarquables, telle que (7) et (8) n.° 2, (7) n.° 7 et (8) n.° 10. A la vérité, on peut résoudre les mêmes problèmes par des moyens élémentaires, comme je l'ai fait (note 7); mais les résultats sont bien moins simples, et il faut prouver leur identité avec ceux du calcul différentiel. Par ce moyen, on fait rentrer dans les élémens des formules déduites d'une analyse transcendante; on simplifie et l'on perfectionne des théories élémentaires par d'autres plus relevées.

Enfin M. *Bret* reproche à la méthode *de maximis* d'employer une propriété non encore démontrée; mais il ne fait pas attention que quand on s'occupe de déterminer l'espèce, la forme et la position d'une ligne ou d'une surface représentées par une équation proposée, on connaît déjà nécessairement les propriétés de ces lignes et surfaces : il ne s'agit plus que de particulariser un individu d'une famille déjà connue.

TABLE DES MATIÈRES.

SECTION PREMIÈRE.

DES LIGNES COURBES.

SECTION DEUXIÈME.

SURFACES COURBES.

SECTION PREMIERE.

DES LIGNES COURBES.

CLASSIFICATION DES LIGNES COURBES.

Toute équation du deuxième degré à deux variables exprime toujours l'une de ces neuf choses, 1.° une ellipse, 2.° une hyperbole, 3.° une parabole, 4.° deux droites qui se coupent, 5.° deux droites parallèles, 6.° deux droites parallèles imaginaires, 7.° deux droites parallèles qui se confondent, 8.° un point unique, 9.° deux droites imaginaires qui se coupent.

Quand on demande de construire une équation numérique du deuxième degré, il s'agit 1.° d'assigner auquel des neuf cas précédens elle se rapporte; 2.° de déterminer la position et la forme de la courbe qu'elle représente. Ce second objet se remplit de la manière la plus directe et la plus simple, en déterminant la position et la grandeur des diamètres principaux de la courbe.

On est en usage de partager les neuf cas que représente l'équation générale du deuxième degré, en trois classes, ellipse, hyperbole, parabole qu'on subdivise en variétés : cela n'est pas très-exact; en effet, de quelque manière qu'on coupe un cône droit par un plan, on ne peut pas obtenir le cas de deux droites parallèles, qui est cependant compris dans l'équation du deuxième degré. La géométrie ainsi que la nature ne reconnaissent que des individus, mais non des genres ou des espèces. Cela n'empêche pas que les systèmes de classification ne soient utiles pour distinguer les individus.

§. I.

ELLIPSE ET HYPERBOLE.

Pour avoir la position et la forme de la courbe, il suffit de connaître 1.° les coordonnées du centre ; 2.° la direction et la grandeur des deux axes de la courbe.

1. *Coordonnées du centre.* Soit

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0\ldots(1),$$

la proposée à construire. En la résolvant par rapport à y et à x et annullant le radical, ou bien, ce qui revient au même, en la différenciant par rapport à y et à x alternativement on a les deux équations :

$$2Ay+Bx+D=0\ldots.(2)$$
$$2Cx+By+E=0\ldots.(3),$$

qui, comme on sait, sont celles de deux diamètres passant par les quatre points de contact du parallélogramme circonscrit à la courbe parallèlement aux axes des coordonnées.

En construisant les équations (2) et (3), leur intersection donne le centre de la courbe : ou bien en les combinant, on a pour l'abscisse α et l'ordonnée β de ce centre, les valeurs suivantes :

$$\alpha=\frac{BD-2AE}{4AC-B^2}\ ;\ \beta=\frac{BE-2CD}{4AC-B^2}.$$

2. *Direction et grandeur des axes.* Pour déterminer la direction et la grandeur des axes de la courbe, il est plus simple de transporter parallèlement l'origine au centre ; en faisant $x=x'+\alpha$ et $y=y'+\beta$ dans l'équation (1) : on a ainsi la transformée suivante, dans laquelle j'ai supprimé les accens et fait pour abréger :

$$G=\frac{AE^2+CD^2-BDE}{B^2-4AC}+F\ ;\ \text{ou } G=\frac{(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)}{4A(B^2-4AC)}$$

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+G=0\ldots.(4).$$

Soit ε l'angle formé dans le quadran positif pas les axes des coordonnées, et r un demi-diamètre quelconque de la courbe : pour déterminer ce diamètre à être un axe de la courbe, il suffit d'écrire qu'il est un *maximum* ou un *minimum*. Il y a plusieurs manières d'employer ce principe ; voici la plus directe.

Soit $y=px$ l'équation d'un diamètre : sa grandeur est donnée par l'équation $y^2+x^2+2xy.\cos.\varepsilon=r^2 \ldots (5)$. Je substitue dans (4) et (5) px pour y, et éliminant x^2, entre les deux équations qui en résultent, il vient la suivante :

$$r^2(Ap^2+Bp+C)+G(1+p^2+2p\cos\varepsilon)=0 \ldots (6).$$

Je la différencie en faisant r constant, puisque par hypothèse on doit avoir $dr=0$, et il vient

$$2p(Ar^2+G)+Br^2+2G\cos\varepsilon=0 \ldots (7);$$

retranchant (7) multipliée par p du double de (6), on a encore

$$p(Br^2+2G\cos.\varepsilon)+2Cr^2+2G=0 \ldots (8):$$

ces deux équations (7) et (8) renferment toute la solution du problème : en les combinant on en tire

$$p=\frac{A-C}{B-2A\cos\varepsilon}\pm\sqrt{\left(\frac{A-C}{B-2A\cos\varepsilon}\right)^2+\frac{B-2C\cos\varepsilon}{B-2A\cos\varepsilon}}$$

$$(B^2-4AC)r^4-4G(A+C-B.\cos.\varepsilon)r^2-4G^2\sin.^2.\varepsilon=0 \ldots (\alpha) \text{ ou}$$

$$r^2=\frac{2G}{B^2-4AC}\left(A+C-B\cos.\varepsilon\pm\sqrt{(A+C-B\cos.\varepsilon)^2+(B^2-4AC)\sin.^2\varepsilon}\right)$$

p aura deux valeurs, p', p'', et les équations des axes de la courbe seront $y=p'x$ et $y=p''x$, au moyen desquelles leurs directions seront connues ; de même, r aura quatre valeurs correspondantes $+r'$, $+r''$, $-r'-r''$, égales deux-à-deux et de signes contraires, qui seront les grandeurs des quatre demi-axes de la courbe.

Pour éviter l'équivoque dans la correspondance de p' et p'' avec r', r'', on calculera d'abord p' et p'' : ensuite on se servira de l'une des deux équations (7) ou (8), pour avoir r' et r''. On peut démontrer aisément que p', p'', r'^2, r''^2 sont toujours réels (V. la 1.re note du n.° 2) : dans le cas de $4AC-B^2>0$, c'est-à-dire

dans le cas de l'ellipse, r'^2 et r''^2 sont tous deux positifs, et par conséquent les deux axes sont réels; mais dans le cas de $4AC-B^2<0$, les deux valeurs de r^2 sont l'une positive, l'autre négative, et l'un des axes est imaginaire.

On peut remarquer que les axes de la courbe sont perpendiculaires entr'eux : en effet, les valeurs de p' et p'' satisfont à la condition de cette perpendicularité, c'est-à-dire à l'équation

$$p'p''+1+(p'+p'')\cos\varepsilon=0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (9)$$ (V. note 2).

Dans le cas particulier des coordonnées rectangulaires, il suffira de faire $\cos.\,\varepsilon=0$, $\sin.\,\varepsilon=1$, dans les formules précédentes.

Remarquons en passant que les formules trouvées peuvent servir à démontrer d'une manière simple et élégante les théorèmes connus sur les diamètres conjugués (V. le n.° 5 de la note 2).

5. *Variété de l'ellipse.* 1.° La proposée (4) représente une ellipse quand $4AC-B^2>0$: on a aussi A et C de même signe. Cela se démontre facilement en la résolvant par rapport à y, ou bien, en appliquant la règle de Descartes à l'équation qui a donné la valeur de r^2, il faut de plus que la proposée ne soit pas absurde, ce qui exige la condition $G<0$ ou $(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)>0$.

2.° La proposée se réduit à un point unique qui est le centre de la courbe, lorsque $G=0$.

5.° Lorsque G est positif, la proposée est absurde, et elle représente une ellipse imaginaire.

4.° L'ellipse devient un cercle, quand on a à-la-fois $A=C$; $B=2A\cos.\,\varepsilon$. Alors les deux valeurs de r sont égales, le radical de son expression devient nul : on le démontre en le mettant sous la forme du 1.° de la note 2. Le rayon du cercle est $\sqrt{\frac{-G}{A}}$: cela se déduit aisément de l'équation (4).

4. *Variétés de l'hyperbole.* La proposée à construire appartient

à l'hyperbole, quand $B^2-4AC>0$, A et C sont de signes différens, et que G n'est pas nul.

1.° La courbe dégénère en deux lignes droites qui se coupent au centre; quand $G=0$, elles ont pour équation $y=x\left(\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\right)$ Cette équation est aussi celle des deux asymptotes, quand G n'est pas nul (V. note 4).

2.° L'hyperbole est équilatère, quand on a à-la-fois $B^2-4AC>0$; $A+C-B\cos.\varepsilon=0$ (V. le 2.° de la note 4). Alors on a $r^2=\frac{2G\sin\varepsilon}{\sqrt{B^2-4AC}|}$.

§. II.

PARABOLE.

Pour construire l'équation proposée quand elle représente une parabole, il faut trouver trois choses: 1.° la position de son axe; 2.° les coordonnées du sommet de l'axe; 3.° la grandeur du paramètre.

5. *Équation de l'axe.* Soit toujours proposée l'équation,

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0\;....\;(1):$$

puisqu'elle appartient à la parabole, on a $B^2=4AC$, et l'on peut la mettre sous cette forme

$$(2Ay+Bx)^2+4ADy+4AEx+4AF=0\;....\;(2),$$

l'équation $2Ay+Bx+D=0$ sera (V. n.° 1) celle d'un diamètre, et comme dans la parabole ils sont tous parallèles, on aura, en faisant $p'=\frac{-B}{2A}$, $y=p'x\;...\;(3)$ pour l'équation du diamètre qui passe par l'origine: $y=p''x\;...\;(4)$ sera l'équation d'une autre droite perpendiculaire à la première, et passant aussi par l'origine: la relation de p'' à p' est donnée par l'équation (9) n.° 2, et l'on a

$$p''=\frac{B\cos\varepsilon-2A}{2A\cos\varepsilon-B}\Big|.$$

Maintenant la tangente dans le sommet de la parabole étant perpendiculaire à son axe, et par conséquent parallèle à la droite de l'équation (4), on exprime cette condition en écrivant que $\frac{dy}{dx}$ donnée par l'équation (2) de la courbe est égale à $\frac{dy}{dx}$ donnée par l'équation (4), c'est-à-dire à p''. En exécutant ce petit calcul, on arrive très-simplement à l'équation $y = -\frac{Bx}{2A} - \frac{E + Dp''}{B + 2Ap''}$, qui, en faisant $m = -\frac{E + Dp''}{B + 2Ap''}$, devient $y = p'x + m \ldots\ldots (5)$: c'est l'équation de l'axe de la parabole.

On peut aussi déduire les valeurs de p' et p'' de celle de p trouvée dans le n.° 2 ; il suffit d'y mettre $\frac{B^2}{4A}$ pour C.

6. *Coordonnées du sommet de l'axe.* On peut trouver le sommet de l'axe par l'intersection de la droite (5) ou équation de l'axe avec la suivante,

$$Dy + Ex + F + Am^2 = 0 \ldots\ldots (6),$$

qui est une combinaison de (2) et (5).

En éliminant x et y entre (2) et (5), on a l'abscisse α et l'ordonnée β du sommet, ainsi qu'il suit :

$$\alpha = \frac{F + m(D + Am)}{Dp' + E} \; ; \; \beta = p'\alpha + m.$$

7. *Paramètre.* On peut trouver le paramètre par des moyens élémentaires : on y parvient plus brièvement par cette considération que dans le sommet de l'axe le rayon de courbure est double de la distance f du sommet au foyer.

L'expression du rayon de courbure dans une courbe quelconque, dont les coordonnées sont parallèles à deux axes qui font un angle ε, est, en faisant dx constant, $\frac{(dy^2 + dx^2 + 2\cos.\varepsilon . dy\, dx)^{\frac{3}{2}}}{-\sin.\varepsilon . dx\, ddy}$

On tirera de l'équation (2) (en remarquant que $\frac{dy}{dx} = p''$) $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-(2Ap''+B)^3}{2A(2Ay+Bx)+2AD}$ qui à cause de l'équation (5) se change en $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-(2Ap''+B)^3}{2A(BD-2AE)}$: enfin substituant dans l'expression du rayon de courbure cette valeur de $\frac{ddy}{dx^2}$ et p'' pour $\frac{dy}{dx}$, il vient

$$f = \frac{A(1+p''^2+2p''\cos\varepsilon)^{\frac{3}{2}}(BD-2AE)}{\sin.\varepsilon(2Ap''+B)^3}$$

On peut aussi déduire f de la valeur trouvée n.° 2 pour r^2. En effet, si r' est le plus grand des deux demi-axes d'une ellipse, r'' le plus petit, et $2f$ le demi-paramètre du grand axe, on a la relation $2f = \frac{r''^2}{r'}$: en y substituant pour r' et r'' les valeurs trouvées n.° 2, il vient

$$2f = \frac{(2G)^{\frac{1}{2}}[A+C-B\cos\varepsilon-((A+C-B\cos.\varepsilon)^2+(B^2-4AC)\sin.^2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}]}{(B^2-4AC)^{\frac{1}{2}}[A+C-B\cos.\varepsilon+((A+C-B\cos.\varepsilon)^2+(B^2-4AC)\sin.^2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}}$$

Cette expression du demi-paramètre d'une ellipse devient $\frac{0}{0}$ quand on y fait $B^2 = 4AC$, c'est-à-dire dans le cas de la parabole; mais si on développe en série par la formule du binome de Newton la quantité $((A+C-B\cos.\varepsilon)^2+(B^2-4AC)\sin.^2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$, en se bornant au second terme de la série, parce que les suivans sont d'un ordre inférieur, et si de plus on fait attention qu'à cause de $B^2=4AC$, la valeur de G se réduit à $\frac{(BD-2AE)^2}{4A(B^2-4AC)}$, alors la quantité B^2-4AC disparait du numérateur et du dénominateur de la fraction ci-dessus, et il vient $f = \frac{(BD-2AE)\sin.^2\varepsilon}{8A^{\frac{1}{2}}(A+C-B\cos.\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}$ . . . . . (7) (*)

ou $f = \frac{A(BD-2AE)\sin.^2\varepsilon}{(B^2+4A^2-4AB\cos.\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}$.

(*) Cette expression de f est irréductible et plus simple que celle que j'ai donnée dans mes opuscules.

La valeur de f est susceptible du double signe $\pm$; mais la discussion de l'équation (1) de la parabole fait voir que la courbe s'étend à l'infini du côté des x positifs ; quand $BD-2AE$ est positif, et *vice-versa* ; ce qui indique de quel côté on doit porter f sur l'axe de la parabole.

Je remarquerai qu'on peut trouver tous les résultats précédens pour les trois courbes, en employant ce seul principe, que dans les sommets des diamètres principaux, le rayon de courbure est un *maximum* ou un *minimum* : mais cette marche séduisante par son uniformité pour les trois courbes et par sa généralité, a l'inconvénient d'être plus compliquée que celle que j'ai suivie : enfin on peut aussi construire l'équation du deuxième degré par des moyens élémentaires (V. la note 7).

8. *Variétés de la courbe.* 1.° Lorsque $BD=2AE$, l'équation (1) exprime deux droites parallèles, si d'ailleurs $D^2>4AF$.

2.° Ces deux droites se confondent en une seule, si on a de plus $D^2=4AF$.

3.° Enfin ces deux droites sont imaginaires, si $D^2<4AF$.

Dans ces trois cas, l'équation (1) est décomposable en deux facteurs du premier degré qui sont les équations des deux droites parallèles, et peut s'écrire ainsi :

$$(2Ay+Bx+D+\sqrt{D^2-4AF})(2Ay+Bx+D-\sqrt{D^2-4AF})=0.$$

Nous terminerons par une remarque qui s'applique aux trois courbes : c'est que quand le rectangle xy manque dans la proposée, et que de plus les coordonnées sont rectangulaires, il suffit de transporter l'origine parallèlement, soit au centre de l'ellipse et de l'hyperbole, soit au sommet de la parabole, en faisant disparaître les seconds termes où les inconnues sont au premier degré. Enfin si les deux quarrés x^2 et y^2 manquent à-la-fois, l'hyperbole se trouve rapportée au centre et aux asymptotes, quand on a fait disparaître les seconds termes.

SECTION DEUXIÈME.

DES SURFACES COURBES DU DEUXIÈME DEGRÉ.

CLASSIFICATION DES SURFACES DU DEUXIÈME DEGRÉ.

Toute équation du deuxième degré à trois variables exprime toujours une de ces quinze choses, 1.° un ellipsoïde, 2.° l'hyperboloïde à une nappe, 3.° l'hyperboloïde à deux nappes, 4.° le cône droit à base elliptique, 5.° le paraboloïde elliptique, 6.° le paraboloïde hyperbolique, 7.° le cylindre hyperbolique, 8.° le cylindre elliptique, 9.° le cylindre parabolique, 10.° deux plans parallèles, 11.° un seul plan, 12.° deux plans qui se coupent, 13.° une ligne droite, 14.° un point unique, 15.° une absurdité.

On peut partager les surfaces du deuxième degré 1.° en surfaces qui ont un centre; 2.° en surfaces qui n'ont point de centre; 3.° en surfaces qui ont une infinité de centres.

On peut aussi les partager 1.° en surfaces non développables; 2.° surfaces développables; 3.° surfaces développées ou planes.

Aucun système de classification n'est parfait, parce qu'il est plusieurs des quinze cas précédens, dont les caractères appartiennent à-la-fois à des classes différentes : c'est pourquoi il m'a paru préférable de traiter séparément les cas dont la discussion analytique ne peut pas se déduire simplement de celle des autres cas.

Quand on demande de construire une équation numérique du deuxième degré à trois variables, il s'agit 1.° d'assigner auquel des

quinze cas elle se rapporte ; 2.° de déterminer la forme et la position de la surface à l'égard des plans coordonnés. Ce second objet se remplit plus simplement que d'aucune autre manière, en déterminant la grandeur et la position des diamètres principaux de la surface, son centre ou son pôle, ou la ligne des pôles, suivant son espèce.

§. I.

ELLIPSOIDE ET HYPERBOLOIDES.

Ces trois surfaces ont un centre, et il faut trouver 1.° les coordonnées de ce centre ; 2.° la direction et la grandeur des trois diamètres principaux.

9. *Coordonnées du centre.* Soit la proposée à construire

$$Az^2+A'y^2+A''x^2+Bzy+B'zx+B''xy+Cz+C'y+C''x+F=0\ldots(1).$$

En la résolvant successivement par rapport à z, y et x, et supprimant le radical, ou bien, en la différenciant par rapport à chaque variable, on a les trois équations suivantes, qui sont celles de trois plans diamètres, $2Az+By+B'x+C=0$;

$$2A'y+Bz+B''x+C'=0\,;$$

$$2A''x+B'z+B''y+C''=0.$$

On sait aussi qu'en égalant à zero les trois radicaux, ces équations $V=0$ $V'=0$ $V''=0$, sont celles des projections sur les trois plans coordonnés des trois intersections de la surface par les plans diamètres : ces projections sont les bases de trois cylindres tangens.

L'intersection commune de ces trois plans donne le centre de la surface ; en combinant donc les trois équations ci-dessus, on aura, ainsi qu'il suit, le coordonnées α, β, γ de ce centre, en faisant

pour simplifier

$$D = AB''^2 + A'B''^2 + A''B^2 - BB'B'' - 4AA'A''$$

$$x = \alpha = \frac{1}{2D}((BB'' - 2A'B')C + (BB' - 2AB'')C' + (4AA' - B^2)C'')$$

$$y = \beta = \frac{1}{2D}(C(B'B'' - 2A''B) + C''(B'B - 2AB'') + C'(4AA'' - B'^2))$$

$$z = \gamma = \frac{1}{2D}[C(4A'A'' - B'2) + C'(B'B'' - 2A''B) + C''(BB'' - 2AB'')]$$

En faisant dans (1) $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$, $z = z' + \gamma$, la surface est rapportée à trois plans parallèles aux anciens et passant par le centre : on a ainsi, en supprimant les accens des variables, la transformée

$$Az^2 + A'y^2 + A''x^2 + Bzy + B'zx + B''xy + G = 0 \ldots . (2),$$

dans laquelle on a

$$G = A\gamma^2 + A'\beta^2 + A''\alpha^2 + B\beta\gamma + B'\alpha\gamma + B''\alpha\beta + C\gamma + C'\beta + C''\alpha + F :$$

on trouve que cette valeur de G, d'après la notation du n.° 15 ci-après, revient à celle-ci $G = \frac{(bd - 2ae)^2 - (b^2 - 4ac)(d^2 - 4af)}{-16Aa(b^2 - 4ac)}$.

10. *Direction et grandeur des axes.* Les axes des coordonnées étant supposées obliques, comme il est nécessaire pour parvenir à des formules complètes et générales, soit ang. $(y, z) = \varepsilon$; ang. $(z, x) = \varepsilon'$; ang. $(x, y) = \varepsilon''$: soit de plus r un demi-diamètre quelconque de la surface, on aura

$$r^2 = z^2 + y^2 + x^2 + 2zy \cos. \varepsilon + 2zx \cos. \varepsilon' + 2xy \cos. \varepsilon'' \ldots . (3)$$

(V. la note 10).

Ici, comme pour l'ellipse, on déterminera r à être un demi-diamètre principal, en écrivant que r est un *maximum* ou un *minimum* : il y a plusieurs manières d'employer ce principe ; la suivante conduit par le plus court chemin à un résultat irréductible.

Soient $x = pz$, et $y = qz$ les équations du diamètre r : je substitue ces valeurs de x et y dans les équations (2) et (3), et j'élimine

z^2 entre les deux transformés qui en résultent : il vient

$$(A''r^2+G)p^2+(A'r^2+G)q^2+(B''r^2+2G\cos.\varepsilon'')pq+(B'r^2+2G\cos.\varepsilon')p$$
$$+(Br^2+2G\cos.\varepsilon)q+Ar^2+G=0 \ldots\ldots (4).$$

Différenciant cette équation par rapport à p et à q seulement, puisque par hypothèse $dr=0$, et égalant séparément à zéro les multiplicateurs de dp et de dq, il vient

$$2(A''r^2+G)p+(B''r^2+2G\cos.\varepsilon'')q+B'r^2+2G\cos.\varepsilon'=0 \ldots (5)$$
$$2(A'r^2+G)q+(B''r^2+2G\cos.\varepsilon'')p+Br^2+2G\cos.\varepsilon=0 \ldots. (6).$$

Du double de (4) je retranche la somme de (5) multipliée par p et de (6) multipliée par q : il en résulte la suivante :

$$(B'r^2+2G\cos.\varepsilon')p+(Br^2+2G\cos.\varepsilon)q+2Ar^2+2G=0 \ldots (7).$$

Ces relations (5), (6) et (7) entre p, q, r renferment toute la solution du problème : si on élimine r^2 et p, ou r^2 et q, on arrive à une équation du troisième degré en p ou en q, laquelle contient une multitude de termes ; mais si on élimine p et q entre (5) et (6) pour les substituer dans (7), on obtient sans réduction la suivante en r :

$$(AB''^2+A'B'^2+A''B^2-4AA'A''-BB'B'')r^6+G[B^2+B'^2+B''^2$$
$$-4(AA'+AA''+A'A'')+2(2A''B-B'B'')\cos.\varepsilon+2(2A'B'-BB'')\cos.\varepsilon'$$
$$+2(2AB''-BB')\cos.\varepsilon'']r^4-4G^2[A\sin^2.\varepsilon''+A'\sin^2.\varepsilon'+A''\sin^2.\varepsilon$$
$$-B(\cos\varepsilon-\cos\varepsilon'\cos\varepsilon'')-B'(\cos\varepsilon'-\cos\varepsilon\cos\varepsilon'')-B''(\cos\varepsilon''-\cos\varepsilon\cos\varepsilon')]r^2$$
$$-4G^3(1-\cos^2.\varepsilon-\cos^2\varepsilon'-\cos^2.\varepsilon''+2\cos.\varepsilon\cos.\varepsilon'\cos.\varepsilon'')=0 \ldots (8)\ (*).$$

Les six racines de cette équation, lesquelles seront deux-à-deux

---

(*) J'ai publié le premier cette relation remarquable dans les annales de mathématique, cahier d'octobre 1812. En janvier suivant MM. *Monge* et *Hachette* l'ont donnée dans la correspondance de l'école polytechnique, mais seulement pour le cas particulier et plus simple des coordonnées rectangulaires, par des méthodes différentes.

égales et de signe contraire, seront les six demi-diamètres principaux de la surface : les trois valeurs de r^2 (r'^2, r''^2, r'''^2) substitués dans (5) et (6) donneront pour p et q trois couples correspondans $p'\,q'$, $p''\,q''$, $p'''\,q'''$; et alors les directions des diamètres principaux seront données par les trois systèmes d'équation :

$$x = p'z\,,\ x = p''z\,,\ x = p'''z$$
$$y = q'z\,,\ y = q''z\,,\ y = q'''z\,.$$

On sait qu'une équation du troisième degré étant

$$a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0\,,$$

pour que ses trois racines soient réelles et inégales, il faut qu'on ait $4(3a'c'-b'^2)(3b'd'-c'^2)-(9a'd'-b'c')^2 > 0$; en appliquant cette condition aux valeurs de r^2 donnée par l'équation (8), on se convaincra qu'elles sont toutes trois réelles, et qu'ainsi on peut juger de leurs signes par ceux des termes de cette équation.

Les diamètres conjugués des surfaces ont des propriétés analogues à ceux des courbes (V. la note 10). Notre théorie en fournit une démonstration simple.

11. *Caractères et variétés de la surface.* Il suit de ce qui précède, que la proposée appartiendra à l'ellipsoïde, si les trois valeurs de r^2 sont positives ; à l'hyperboloïde d'une nappe, si deux valeurs sont positives; à l'hyperboloïde de deux nappes, si une seule valeur est positive : enfin l'équation (1) n'exprimera absolument rien, si les valeurs de r^2 sont toutes trois négatives, c'est-à-dire si tous les termes de cette équation ont le même signe.

La discussion de l'équation (1) fournit un caractère plus commode pour distinguer l'ellipsoïde ; car dans ce cas on doit avoir

$$B^2-4AA' < 0\,;\ B'^2-4AA'' < 0\,;\ B''^2-4A'A'' < 0\,;\ D < 0\,;$$

on a aussi A, A', A'' de même signe : mais il faut observer que

la quatrième condition réunie à l'une quelconque des trois premières comporte les deux autres.

Pour les deux hyperboloïdes on a $B^2 - 4AA'$ positif, il faut que D ne soit pas nul : $AA'A''$ ne sont pas de même signe.

On distingue l'hyperboloïde à une nappe de celui à deux nappes, en ce que pour le premier on a G négatif, et pour le second G positif : en effet un plan passant par le centre rencontre toujours le premier et pas toujours le second. Si l'on combine un plan quelconque $z = mx + ny$ avec l'équation (2) n.° 9, en la résolvant ensuite par rapport à y, on voit que les valeurs de y ne peuvent devenir imaginaires, ainsi que la courbe de l'intersection, que dans le cas de G positif.

12. *Surfaces de révolutions.* La surface sera de révolution, si l'équation (8) n.° 10 a deux racines égales, et cela aura lieu, si en l'écrivant ainsi

$$ar^6 + br^4 + cr^2 + d = 0 \ldots\ldots (a),$$

on a la condition

$$4(3ac - b^2)(3bd - c^2) = (9ad - bc)^2 \ldots\ldots (b).$$

Par la substitution des coëfficiens primitifs, dans cette équation, G disparaît, et l'on peut obtenir une expression directe en fonction de ses coëfficiens primitifs : ainsi dans le cas des coordonnées rectangulaires on trouve qu'on peut substituer à l'équation de condition précédente (b) les deux qui suivent :

$$2B'B''(A - A') + B(B''^2 - B'^2) = 0 ; \quad 2BB''(A'' - A) + B'(B'^2 - B''^2) = 0.$$

On démontre aisément la première condition ci-dessus (b) en comparant l'équation (a), terme à terme, avec celle-ci

$$(r^2 - r''^2)^2 (r^2 - r'^2) = 0,$$

dont la racine double est r''^2 : cette comparaison fournit trois équa-

tions entre lesquelles on élimine r''^2 et r'^2 : il reste l'équation de condition cherchée.

Pour avoir les valeurs de r'^2 et r''^2, j'écris ainsi l'équation (a): $at^3+bt^2+ct+d=0$; en la différenciant, on a $3at^2+2bt+c=0$. Je cherche le plus grand commun diviseur entre ces deux équations; ce diviseur n'est autre chose que le reste de la première division, savoir $2(3ac-b^2)\,t+9ad-bc$; en l'égalant à zéro on a (à cause de $t''=r''^2$) $r''^2=\frac{9ad-bc}{2(b^2-3ac)}$.

Pour avoir $r'^2=t'$, il suffit de diviser at^3+bt^2+ct+d par $(t-t'')^2$, en faisant abstraction du reste qui doit être nul : le quotient est $at+b+2at''$; en y mettant pour t'' sa valeur, et l'égalant à zéro, il vient pour t, c'est-à-dire pour $t'=r'^2$ cette valeur

$$r'^2=\frac{-b}{a}-\frac{9ad-bc}{b^2-3ac}.$$

En substituant cette valeur de r'^2 dans les équations (5) et (6) du n.° 10, on aura deux équations du premier degré entre p et q, qui feront connaître la direction de l'axe r' de révolution dans le cas des coordonnées rectangulaires.

13. *Sphère et hyperboloïdes équilatères.* En comparant terme à terme l'équation (a) du n.° 12 avec $(r^2-r'^2)^3=0$, on obtient aisément les deux conditions $b^2=3ac$, $c^2=3bd$, et l'on a pour le rayon de la sphère $r'=\sqrt{\frac{-b}{3a}}$: mais en faisant $x=0$, $y=0$ dans l'équation (2) n.° 9, on en conclut plus simplement, que dans le cas de la sphère, les équations de l'axe de révolution sont $Bx=B''z$, $B'y=B''z$, et l'on doit avoir $A=A'=A''$ et $z=r'=\sqrt{\frac{-G}{A}}$.

Dans le cas de l'hyperboloïde équilatère à une et à deux nappes, une ou deux des valeurs de r^2 sont négatives, quoique toutes trois égales : il faut comparer l'équation (a) avec $(r^2-r'^2)^2(r^2+r'^2)=0$ dans le cas d'une seule nappe ; et avec $(r^2+r'^2)^2(r^2-r'^2)=0$ dans le cas

de deux nappes. Les conditions sont, pour les deux cas, $b^2+ac=0$; $bc=ad$; mais la grandeur des axes est $r'=\sqrt{\frac{-b}{a}}$ dans le cas d'une nappe, et $r'=\sqrt{\frac{b}{a}}$ dans le cas de deux nappes. Dans ces deux cas les équations (5) et (6) n.° 10 feront connaître la direction de l'axe de révolution : on sait que les deux hyperboloïdes de révolution sont engendrés par la révolution d'une hyperbole qui tourne autour de son axe imaginaire dans le cas d'une nappe, et autour de l'axe réel dans le cas de deux nappes.

§. II.

PARABOLOIDES, ELLIPTIQUE ET HYPERBOLIQUE.

14. *Observations préliminaires.* Le paraboloïde est plus difficile à traiter que l'ellipsoïde et l'hyperboloïde, parce qu'il n'a pas de centre. On pourrait, il est vrai, déterminer tous les points de la question par ce seul principe qui s'appliquerait aussi aux surfaces qui ont un centre, savoir que dans les sommets des diamètres principaux le rayon de courbure est un *maximum* ou un *minimum* pour les deux sections principales ou lignes de courbures. Il suffirait d'employer une formule qui exprimât ces deux rayons de courbure pour le cas des coordonnées obliques, comme on la trouve pour le cas des coordonnées rectangulaires dans l'application de l'analyse aux surfaces courbes de Monge, pag. 112 : cette méthode est directe et uniforme, mais les calculs sont très-compliqués : il est préférable, au lieu d'attaquer le problème, pour ainsi dire, de vive force, de résoudre les difficultés l'une après l'autre, en choisissant toujours la route la plus facile et la plus courte.

Je vais d'abord rappeler quelques notions sur le paraboloïde : il en est de trois espèces.

Le premier a une seule nappe et un axe principal infini : toutes les sections parallèles à cet axe sont des paraboles, et celles qui lui sont perpendiculaires, sont des ellipses.

Le second a deux nappes contigues et un axe principal ; les sections parallèles à l'axe sont aussi des paraboles, mais celles qui sont perpendiculaires, sont des hyperboles.

Le troisième est un cylindre à base parabolique.

Une propriété remarquable c'est que toutes les sections parallèles entr'elles et à l'axe sont non seulement des paraboles, mais encore des paraboles égales : en effet, si l'on résout, par rapport à z, l'équation générale (1) n.° 9, et que l'on représente par V le radical, on aura $2Az+By+B'x+C\pm V=0$; en combinant cette équation avec celle-ci $2Az+By+B'x+L=0$, (*) (L étant une constante quelconque) on aura $C\pm V-L=0$, équation en x et y qui sera la projection sur le plan des xy de la section parabolique faite par un plan parallèle au plan diamètre : cette projection sera une parabole qui ne différera de la projection parabolique $V=0$ faite par le plan diamètre, que par le terme constant. Or on a vu par l'expression de f n.° 7, que la grandeur du paramètre ne dépend point du terme constant de l'équation de la courbe : donc toutes les sections parallèles ont des projections paraboliques égales, et sont par conséquent des paraboles égales.

Il suit de cette propriété, que je ne sache pas avoir été aperçue, que le paraboloïde peut être engendré, non seulement par un cercle variable de grandeur, ainsi que les surfaces douées d'un centre, mais encore par une parabole constante qui se meut parallèlement à elle-même, et dont le sommet parcourt une autre parabole faisant avec la première un angle quelconque.

Par exemple, pour le paraboloïde de la première espèce, il faut

(*) C'est l'équation d'un plan parallèle au plan diamètre.

concevoir que les deux paraboles avaient d'abord leurs axes et leurs sommets confondus, et leurs plans perpendiculaires entr'eux ; qu'ensuite l'une des deux s'est mue parallèlement, en parcourant par son sommet le périmètre de l'autre.

Pour la deuxième espèce, la génération est la même, avec cette différence, que les deux axes au lieu d'être d'abord couchés l'un sur l'autre, étaient placés bout-à-bout en sens contraire.

Pour le cylindre parabolique, l'une des paraboles génératrices a son paramètre infini, et devient une ligne droite.

On voit par ce qui précède, que pour connaître la forme et la situation du paraboloïde représentée par une équation, il y a quatre choses à déterminer : 1.° la position de l'axe principal ; 2.° les coordonnées de son sommet ou du pôle ; 3.° la position des deux sections principales et perpendiculaires entr'elles, qui passe par cet axe ; 4.° les paramètres de ces deux sections paraboliques.

15. *Équations de l'axe et coordonnées du pôle.* Pour les paraboloïdes elliptiques et hyperboloïques, les trois plans diamètres (V. n.° 9) sont parallèles à l'axe sans être parallèles entr'eux : ils forment un prisme triangulaire, dont les trois arêtes sont parallèles à cet axe. En combinant deux-à-deux les trois plans diamètres que je représente par $S=0$ $S'=0$ $S''=0$, on a les trois équations des trois arêtes : en écrivant qu'elles sont parallèles, on obtient l'équation caractéristique du paraboloïde

$$D=AB''^2+A'B'^2+A''B^2-BB'B''-4AA'A''=0 \ldots . (1).$$

Autrement, en faisant pour abréger dans l'équation générale $B^2-4AA'=a$, $2(BB'-2AB'')=b$, $B''^2-4AA''=c$, $2(BC-2AC')=d$, $2(B'C-2AC'')=e$, $C^2-4AF=f$, elle devient,

$$2Az+By+B'x+C=+\sqrt{(ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f)} \ldots (A).$$

La projection représentée par le radical devant être une parabole, on doit avoir $b^2 = 4ac$, équation identique avec $D = 0$.

En combinant donc les deux plans

$$2Az + By + B'x = 0, \quad 2A'y + B''x + Bz = 0,$$

on aura les équations des projections d'une droite passant par l'origine et parallèle à l'axe de paraboloïde. Ces équations, en faisant pour abréger $p' = \frac{B^2 - 4AA'}{2A'B' - BB''}$ $q' = \frac{2AB'' - BB'}{2A'B' - BB''}$, sont

$$x = p'z \ldots . (2) \quad y = q'z \ldots . (3).$$

Maintenant, si l'on imagine un plan tangent et passant par le pôle, il sera perpendiculaire à l'axe du paraboloïde, ainsi qu'à la droite des équations (2) et (3) : représentons ce plan par

$$z = p_, x + q_, y + 1 \ldots . (4) :$$

la relation entre $p_,\, q_,$ et $p'\, q'$ est connue : elle est $p_, = -p'$, $q_, = -q'$, quand les coordonnées sont rectangulaires : lorsqu'elles sont obliques, ces relations sont

$$p_,(p'\cos\varepsilon' + q'\cos\varepsilon + 1) + p' + q'\cos\varepsilon'' + \cos\varepsilon' = 0 \ldots . (5)$$

$$q_,(q'\cos\varepsilon + p'\cos\varepsilon' + 1) + q' + p'\cos\varepsilon'' + \cos\varepsilon = 0 \ldots . (6)$$

(V. note 15) (ε, ε', ε'' ont la même signification que dans le n.° 10).

Il faut à présent trouver le pôle, c'est-à-dire le point de la surface pour lequel le plan tangent est parallèle à celui de l'équation (4) : pour cela il faut écrire que $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ tirés de l'équation (1) n.° 9 de la surface, sont égaux aux $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ donnés par l'équation (4) ; c'est-à-dire qu'ayant différencié l'équation (1) en faisant successivement y et x constans, il faut poser $\frac{dz}{dx} = p_,$ et $\frac{dz}{dy} = q_,$: on obtient ainsi les deux équations suivantes, qui sont celles de deux

plans passant par l'axe du paraboloïde $S''+p_{,}S=0$, $S'+q_{,}S=0$, ou

$$2A''x+B'z+B''y+C''=-p_{,}(2Az+By+B'x+C) \ldots \ldots (7)$$

$$2A'y+Bz+B''x+C'=-q_{,}(2Az+By+B'x+C) \ldots \ldots (8)$$

En éliminant alternativement y et x entre ces deux équations, il en vient deux autres qui sont celles des projections de l'axe du paraboloïde : on les simplifie par le moyen de la condition $D=0$, et l'on trouve qu'en faisant

$$h=\frac{-(C''+Cp_{,})(2A'+Bq_{,})+(C'+Cq_{,})(B''+Bp_{,})}{(B'+2Ap_{,})(2A'+Bq_{,})-(B+2Aq_{,})(B''+Bp_{,})}$$

$$k=\frac{-(C''+Cp_{,})(B''+B'q_{,})+(C'+Cq_{,})(2A''+B'p_{,})}{(B'+2Ap_{,})(B''+B'q_{,})-(B+2Aq_{,})(2A''+B'p_{,})}$$

elles sont $x-h=p'z \ldots (9)$ et $y-k=q'z \ldots (10)$.

Enfin en combinant l'équation (1) n.° 9 de la surface avec (7) et (8), ou bien avec (9) et (10), on aura les coordonnées $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$ du pôle : elles seront linéaires, parce que les termes affectés de z^2 s'anéantissent d'eux-mêmes, en vertu de la condition (1), $D=0$: ces coordonnées sont :

$$\gamma=-\frac{C'k+C''h+F+A'k^2+A''h^2+B''hk}{2A'q'k+2A''p'h+Bk+B'h+B''hq'+B''kp'+C+C'q'+C''p'}$$

$$\beta=q'\gamma+k\,;\quad \alpha=p'\gamma+h.$$

16. *Plans des deux paraboles principales.* Les équations (7) et (8) n.° 15 sont bien celles de deux plans normaux qui contiennent l'axe du paraboloïde ; mais ces plans ne sont pas ceux des deux paraboles principales : on peut déduire la position de ces derniers des résultats trouvés pour les surfaces qui ont un centre.

En effet, si on élimine r des équations (5), (6), (7) n.° 10, on a une équation du troisième degré en p ou en q, dans laquelle G qui est ici une quantité infinie ne se trouve plus : des trois racines p' p'' p''', et q' q'' q''', le premier couple p' q' est connu,

et donné par les équations (2) et (3) n.° 13 de l'axe du paraboloïde ; les deux autres couples $p'' \; q''$ et $p''' \; q'''$ doivent donc être donnés par une équation du deuxième degré qu'il s'agit d'obtenir sans avoir recours à celle du troisième. Les deux droites représentées par $p'' \; q''$ et $p''' \; q'''$ sont perpendiculaires entr'elles et à l'axe : elles forment au pôle un angle trièdre rectangle : les deux plans passant par l'axe et par chacune des deux droites tangentes, sont ceux des deux paraboles principales. Voici le calcul qui donne ces deux plans.

En éliminant r' des équations (5), (6), (7) n.° 10, on a d'abord les suivantes :

$$(p+q\cos\varepsilon''+\cos\varepsilon')(B'p+Bq+2A)-(p\cos\varepsilon'+q\cos\varepsilon+1)(2A''p+B''q+B')=0$$

$$(q+p\cos\varepsilon''+\cos\varepsilon)(B'p+Bq+2A)-(p\cos\varepsilon'+q\cos\varepsilon+1)(2A'q+B''p+B)=0$$

Je fais,

$a=B'-2A''\cos\varepsilon'$; $b=B'\cos\varepsilon''+B-2A''\cos\varepsilon-B''\cos\varepsilon'$; $c=B\cos\varepsilon''-B''\cos\varepsilon$;

$d=2A-2A''$; $e=B\cos\varepsilon'+2A\cos\varepsilon''-B''-B'\cos\varepsilon$; $f=2A\cos\varepsilon'-B'$;

$a'=B'\cos\varepsilon''-B''\cos\varepsilon'$; $b'=B'+B\cos\varepsilon''-2A'\cos\varepsilon'-B''\cos\varepsilon$; $c'=B-2A'\cos\varepsilon$;

$d'=B'\cos\varepsilon-2A\cos\varepsilon''-B''$; $e'=2A-2A'$; $f'=2A\cos\varepsilon-B$, et j'ai

$$ap^2+bpq+cq^2+dp+eq+f=0 \; \ldots\ldots\ldots \; (11)$$

$$a'p^2+b'pq+c'q^2+d'p+e'q+f'=0 \; \ldots\ldots \; (12)$$

Mais $p' \; q'$ étant des valeurs de $p \; q$, on doit avoir

$$ap'^2+bp'q'+cq'^2+dp'+eq'+f=0 \; \ldots\ldots\ldots \; (13)$$

$$a'p'^2+b'p'q'+c'q'^2+d'p'+e'q'+f'=0 \; \ldots\ldots \; (14)$$

Je retranche (13) de (11) et (14) de (12), et faisant $p-p'=u$; $q-q'=t$; $2ap'+d=g$; $2cq'+e=l$; $2a'p'+d'=g'$; $2c'q'+e'=l'$, il vient les deux suivantes qui, ayant perdu le terme constant, fournissent par l'élimination une équation finale d'un degré moindre d'une unité :

$$au^2+but+ct^2+gu+lt=0 \ldots (15) \quad a'u^2+b'ut+c't^2+g'u+l't=0 \ldots (16).$$

Éliminant donc, et faisant pour abréger $a_{,}=ac'-a'c$; $b_{,}=al'-a'l$; $c_{,}=a'b-ab'$; $d_{,}=a'g-ag_{,}$, on trouve d'abord $u=t\,\dfrac{a_{,}t+b_{,}}{c_{,}t+d_{,}}$ ... (17); et ensuite en observant que le terme t^3 s'anéantit de lui-même, on a

$$(2aa_{,}b_{,}+a_{,}bd_{,}+bb_{,}c_{,}+2cc_{,}d_{,}+a_{,}c_{,}g+c_{,}^2l)\,t^2$$
$$+(ab_{,}^2+bb_{,}d_{,}+cd_{,}^2+a_{,}d_{,}g+b_{,}c_{,}g+2c_{,}d_{,}l)t+b_{,}d_{,}g+d_{,}^2l=0 \;\ldots\; (18).$$

Cette équation (18) donnera deux racines t' t'', et l'équation (17) donnera u' u'' : en remontant, on en déduira les valeurs correspondantes de p et q, c'est-à-dire les deux couples p'' q'' et p''' q'''.

On trouvera ensuite aisément que les deux plans qui contiennent, savoir le premier, l'axe $x=p'z$, $y=q'z$, et la tangente $x=p''z$, $y=q''z$; le second, l'axe $x=p'z$, $y=q'z$, et la tangente $x=p'''z$, $y=q'''z$, sont

$$z(p''q'-p'q'')+y(p'-p'')+x(q'''-q')=0 \;\ldots\; (19)$$
$$z(p'''q'-p'q''')+y(p'-p''')+x(q'''-q')=0 \;\ldots\; (20).$$

Il faut observer que pour ces deux plans des paraboles principales l'origine des coordonnées est prise sur un point de l'axe du paraboloïde, par exemple au pôle.

Autre manière. Le moyen suivant de trouver les deux plans pourra paraître aussi simple que direct. Soit $z=p_{,}x+q_{,}y+n$ ... (21) le plan d'une section perpendiculaire à l'axe, laquelle sera elliptique ou hyperbolique. Si par l'extrémité de l'un des axes de cette section, ou même une droite à un point quelconque de l'axe du paraboloïde, par exemple au pôle, cette droite sera la plus grande ou la plus petite de toutes celles qu'on peut mener des autres points de la section, et elle sera dans le plan de l'une des deux paraboles principales. Pour faciliter le calcul, il faut choisir pour point de l'axe le pôle même, et y transporter l'origine des coordonnées sans changer leurs directions.

En faisant donc $x=x'+\alpha$; $y=y'+\beta$; $z=z'+\gamma$, dans l'équation de la surface, elle devient, en supprimant les accens des variables,

$$Az^2+A'y^2+A''x^2+Bzy+B'zx+B''xy+Hz+H'y+H''x=0 \ldots (22)$$

dans laquelle on a $H=C+B6+B'\alpha+2A\gamma$; $H'=C'+B''\alpha+B\gamma+2A'6$; $H''=C''+B''6+B'\gamma+2A''\alpha$, le terme constant de cette équation a disparu de lui-même.

La distance de l'origine à un point quelconque de la surface est $\sqrt{(z^2+y^2+x^2+2zy\cos\varepsilon+2zx\cos\varepsilon'+2xy\cos\varepsilon'')}$: sa différencielle égalée à zéro donnera une première équation : on en aura une seconde en différenciant l'équation (22) : la différencielle de (21) en donnera une troisième, en observant que n est constante, parce que la variation se fait dans le plan de cette équation : il faut ensuite éliminer dz, dy, dx, et il vient la suivante :

$$p_{,}(a'b-ab')+q_{,}(ac'-a'c)+bc'-b'c=0 \ldots\ldots (23)$$

dans laquelle on a fait

$a=z+y\cos\varepsilon+x\cos\varepsilon'$; $b=y+z\cos\varepsilon+x\cos\varepsilon''$; $c=x+z\cos\varepsilon'+y\cos\varepsilon''$

$a'=2Az+By+B'x$; $b'=2A'y+Bz+B''x$; $c'=2A''x+B'z+B''y$.

Cette équation (23) indépendante de n, qui fixe la position du plan constant, exprime une propriété commune à toutes les sections perpendiculaires à l'axe, savoir celle de comprendre dans chaque section le point dont la distance au pôle est un *maximon* ou un *minimon*. Elle doit donc contenir les plans des deux paraboles principales qui jouissent de cette même propriété : il faut pour cela qu'elle soit décomposable en deux facteurs du premier degré, qui n'aient point de terme constant, puisque les plans représentés par ces facteurs passent par l'origine : il suit encore de-là qu'elle ne doit renfermer que les quarrés et les rectangles des trois variables : c'est pour cela qu'on s'est dispensé d'écrire dans les valeurs de a' b' c' les termes constans $H+H'+H''$.

En faisant alternativement $x=0$, $y=0$ dans l'équation (23), on a les traces des plans des deux paraboles principales sur ceux des

zy et des zx. En la combinant avec $z=p_ix+q_iy$, on aurait les valeurs de $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, c'est-à-dire les valeurs de p'' q'', p''' q''' trouvées par la première manière.

Enfin, en substituant dans l'équation (23) les coëfficiens primitifs, et ayant égard à la condition $D=0$, il serait possible, du moins dans le cas des coordonnées rectangulaires, de la décomposer en ces deux facteurs linéaires; mais cela sera plus facile, quand la proposée sera numérique.

17. *Paramètres des deux paraboles principales.* Appelons f la distance du pôle au foyer de l'une des paraboles principales; X un abscisse conté sur son axe qui n'est autre chose que celui du paraboloïde; Y l'ordonnée correspondante de cette parabole; R la corde qui est l'hypothénuse du triangle rectangle, dont X et Y sont les côtés; on aura par la propriété de la parabole $4fX=Y^2=R^2-X^2$, ou $4f=\frac{R^2}{X}-X$: il faut trouver les expressions de R^2 et de X.

Comme le point pris sur la parabole est arbitraire, il est plus simple de le supposer dans le plan des y, z, en se rappelant que l'origine a été transportée au pôle: soit donc β', γ' les coordonnées de l'extrémité M de l'ordonnée Y et α'', β'', γ'' les coordonnées du point P où Y rencontre l'axe du paraboloïde, on aura

$$R^2=\gamma'^2+\beta'^2+2\beta'\gamma'\cos\varepsilon$$

$$X=\sqrt{(\gamma''^2+\beta''^2+\alpha''^2+2\beta''\gamma''\cos\varepsilon+2\alpha''\gamma''\cos\varepsilon'+2\alpha''\beta''\cos\varepsilon'')}.$$

Soit $z=Mx+Ny\ldots$ (24) le plan de l'une des paraboles données par l'équation (23) ou par (19) et (20); il faudra combiner les équations (22) et (24), en y faisant $x=0$, pour avoir β', γ', et l'on aura $\beta'=-\frac{HN+H'}{AN^2+A'+BN}$; $\gamma'=N\beta'$.

Le point P, où se termine l'abscisse X sur l'axe du paraboloïde, est déterminé par la rencontre de cet axe avec le plan qui lui est perpendiculaire, et qui passe par le point M de la parabole dont les coordonnées sont $x=\alpha'$, $y=\beta'$, $z=\gamma'$. Ce plan a pour équation $z-\gamma'=p_{,}x+q_{,}(y-\beta')$. En combinant cette équation avec celle de l'axe qui sont $x=p'z$, $y=q'z$, on a

$$\gamma''=\frac{\gamma'-q_{,}\beta'}{1-p'p_{,}-q'q_{,}};\ \beta''=q'\gamma'';\ \alpha''=p'\gamma''.$$

Nous avons ainsi les valeurs de toutes les quantités qui entrent dans l'expression du paramètre $4f$ de l'une des paraboles principales; il ne reste plus qu'à répéter les mêmes calculs pour la seconde parabole principale, et en représentant son plan par $z=M'x+N'y$, on aura des résultats analogues pour la valeur $4f'$ de son paramètre.

18. *Distinction des deux paraboloïdes.* Le paraboloïde elliptique se distingue de l'hyperbolique, en ce que les traces ou intersections de la surface par les plans coordonnés, lesquelles s'obtiennent en faisant alternativement $x=0$, $y=0$, $z=0$ dans l'équation (1) n.° 9, sont des ellipses dans le premier cas et des hyperboles dans le second.

Ainsi pour le paraboloïde elliptique les quantités (B^2-4AA'), (B'^2-4AA''), $(B''^2-4A'A'')$ sont négatives : elles sont positives pour le paraboloide hyperbolique ; mais l'une des trois conditions comporte les deux autres.

19. *Paraboloïde de révolution.* Quand le paraboloïde est de révolution, les deux paramètres sont égaux : l'équation (23) est satisfaite d'elle-même : ces six coëfficiens sont nuls, ce qui fournit six équations de conditions ; dans ce cas la condition générale (b) des surfaces de révolution du n.° 12, à cause de $D=a=0$, se réduit à $c^2=4bd$. Pour avoir le paramètre de la parabole de révolution, il faut remarquer qu'il n'y a plus de parabole principale : tous les plans

qui passent par l'axe de révolution, donnent la même section parabolique : nous pouvons donc choisir celle qui passe en même tems pas l'axe des z : la quantité β' du n.° 17 sera nulle : pour avoir $\gamma'_{/}$ il suffira de faire $x=0$, $y=0$ dans l'équation (22), et l'on aura $z=\gamma'=\frac{-H}{A}$; d'où $R^2=\gamma'^2=\frac{H^2}{A^2}$: on aura les valeurs de α'' β'' γ'', en faisant $\beta'=0$ dans les expressions de ces quantités n.° 17.

Remarquons que, dans le cas des coordonnées rectangulaires, la condition $c^2=4bd$ devient (c),

$$(A+A'+A'')^2=4(AA'+AA''+A'A'')-B^2-B'^2-B''^2.$$

Ajoutons que, quand le paraboloïde est de révolution, il est en même tems elliptique. Ainsi il ne suffit pas que les deux paramètres soient égaux.

§. III.

CYLINDRES ELLIPTIQUES, ET HYPERBOLIQUES.

20. *Caractères des cylindres.* Les trois plans diamètres se coupent dans l'axe du cylindre : si on les combine deux-à-deux, on aura trois intersections : il faut exprimer qu'elles n'en font qu'une, en égalant les coëfficiens.

Autrement, un plan diamètre quelconque donne deux droites parallèles par son intersection avec la surface : il faut exprimer que le radical de l'équation (A) n.° 15 représente deux droites parallèles (V. le 1.° du n.° 8).

L'une et l'autre considération conduit à ces deux conditions $b^2=4ac$, $bd=2ae$, qui, d'après la notation du n.° 15 reviennent à celle-ci $D=0$

$$(BC-2AC')(BB'-2AB'')=(B'C-2AC'')(B^2-4AA')$$

On lit dans la correspondance de l'école polytechnique pour

1812, pag. 516, que la surface est cylindrique quand on a la condition rapportée à ladite page, laquelle revient à la nôtre, $D=0$. Cela n'est pas exact : cette condition $D=0$ est commune aux surfaces qui n'ont pas de centre ; elle ne suffit pour caractériser le cylindre que dans le cas où les premières puissances des variables manquent dans la proposée : en général, il faut lui ajouter la deuxième condition que j'ai rapporté plus haut.

On distingue le cylindre hyperbolique de celui qui est elliptique, en ce que pour le premier les traces ou intersections de la surface par les plans coordonnés sont des hyperboles ; alors on a

$$B^2>4AA',\ B'^2>4AA'',\ B''^2>4A'A''\ (*).$$

21. *Équations de l'axe.* On a tout de suite les équations de l'axe, en combinant deux plans diamètres ; et elles sont en faisant

$$p'=\frac{B^2-4AA'}{2A'B'-BB''};\ q'=\frac{2AB''-BB'}{2A'B'-BB''};\ h=\frac{BC'-2A'C}{2A'B'-BB''};\ k=\frac{B''C-B'C''}{2A'B'-BB''}$$

$$x-h=p'z\ \ldots\ (1)\ ;\ y-k=q'z\ \ldots\ (2).$$

Il suit de-là que l'axe du cylindre rencontre le plan des x, y dans un point S, dont les coordonnées sont $x=h$, $y=k$; je transporte parallèlement l'origine dans ce point, en faisant $x=x'+h$, $y=y'+k$, dans l'équation générale (1) n.° 9, et supprimant l'accent des variables, il vient la transformée suivante :

$$Az^2+A'y^2+A''x^2+Bzy+B'zx+B''xy+G=0\ \ldots\ (3)$$

dans laquelle on a $G=A'k^2+A''h^2+B''hk+C'k+C''h+F$.

22. *Axes de la base du cylindre.* Concevons par le point S de la nouvelle origine un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre : ce plan est connu, et a pour équation $z=p_{,}x+q_{,}y$: la relation de

(*) Pour le cylindre elliptique, la trace est une ellipse qui, pour n'être pas imaginaire, exige que a soit négatif, d^2-4af positif, ou f positifs.

$p_, q_,$ à $p'\,q'$ est donnée par (5) et (6) du n.° 15. Soit r un demi-diamètre de la section faite par ce plan, qui est la base du cylindre, et $x = pz$, $y = qz$ les équations de ce diamètre : en combinant les équations de ce diamètre avec celle du plan ci-dessus qui le contient, et avec celle de la surface, on trouverait par la méthode du n.° 10 que p, q, r sont données par des équations du deuxième degré : mais il est superflu de faire ce calcul qui rentre dans celui du n.° 10, parce que le cylindre est une variété de l'ellipsoïde ou de l'hyperboloïde.

Il suffit d'effacer, dans l'équation (8) n.° 10, le terme en r^6 dont le coëfficient est D, qui est ici nul : il reste une équation du quatrième degré, résoluble comme celle du deuxième, dans laquelle G a la valeur, rapportée au n.° 21 : les racines $r''\,r'''$ seront les demi-axes de la base du cylindre : en les substituant successivement dans les équations (5) et (6) n.° 10, on aura des valeurs correspondantes p'', q'' ; p''', q''', pour p et q.

En substituant les valeurs de p', p'', p''' ; q', q'', q''' dans les équations (19) et (20) du n.° 16, on aura les deux plans dont chacun passe par l'axe du cylindre et par deux des quatre arètes principales, ainsi que par l'un des deux diamètres principaux de la base.

Observations. Lorsqu'on trouvera $p' = \frac{0}{0}$ ou $q' = \frac{0}{0}$, il faudra combiner de nouveau les plans diamètres $S = 0$, $S' = 0$, $S'' = 0$: ainsi si la surface est $9z^2 + 16y^2 + x^2 - 24zy - 25 = 0$, on trouve $p' = \frac{0}{0}$ $q' = \frac{0}{0}$; mais si l'on reprend les plans diamètres numériques qui sont ici $18z - 24y = 0$, $y = 0$, on en conclut $p' = 0$, $q' = \frac{1}{4}$, $h = 0$, $k = 0$, $r'' = 1$, $r''' = 5$.

Remarque. La base du cylindre sera une hyperbole équilatère ou un cercle, si l'on a la condition $c^2 = 4bd$ du n.° 19, laquelle dans le cas des coordonnées rectangulaires devient (c) ; alors si le cylydre est elliptique, il sera de révolution.

§. IV.

CYLINDRE PARABOLIQUE.

Nous avons déjà vu que le cylindre parabolique est une espèce de paraboloïde, dont l'une des paraboles principales a dégénéré en ligne droite : il est aussi une variété du cylindre elliptique, puisque la parabole qui lui sert de base, est une ellipse dont le centre est à l'infini.

On voit que pour construire le cylindre parabolique il faut déterminer 1.° la ligne des sommets ou l'arête principale ; 2.° le plan diamètre principal, qui passe par la ligne des sommets : 3.° le paramètre de la parabole génératrice qui est la base du cylindre.

23. *Caractères.* Les trois plans diamètres sont parallèles : on exprime cette condition en égalant les coëfficiens des variables dans les équations de ces plans.

Autrement, un plan diamètre ne devant rencontrer la surface que suivant une ligne droite, il faut que le radical de l'équation (A) n.° 15, qui est la projection de cette intersection, exprime une ligne droite ; ce qui exige qu'on ait $a=0$, $b=0$, $c=0$; c'est-à-dire $B^2=4AA'$; $BB'=2AB''$, $B'^2=4AA''$.

On obtient encore les mêmes conditions, en écrivant que les trois traces sont des paraboles.

Ces trois conditions comportent les suivantes : $BB''=2A'B'$, $B'B''=2A''B$, $B''^2=4A'A''$, $D=0$; et par conséquent elles comprennent celle du cylindre elliptique : mais l'inverse n'est pas vraie.

24. *Ligne des sommets, et plan diamètre principal.* Concevons le plan diamètre principal, ou celui qui passe par la ligne des sommets : le plan parallèle qui passe par l'origine sera

$$2Az+By+B'x=0,$$

que j'écris ainsi :

$$z = p_{,}x + q_{,}y \ldots\ldots (1),$$

en faisant $p_{,} = \frac{-B'}{2A}$; $q_{,} = \frac{-B}{2A}$; une droite tangente à la surface et perpendiculaire au plan (1), est exprimée par des équations de cette forme :

$$x - h = p'z \ldots\ldots (2), \quad y - k = q'z \ldots\ldots (3) :$$

p' et q' seront données par les équations (5) et (6) du n.° 15, en y mettant pour $p_{,}q_{,}$ les valeurs ci-dessus. Il faut encore trouver h et k.

L'équation (A) n.° 15, en y faisant $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, est celle du cylindre parabolique : si on y met les valeurs précédentes de y et x, et qu'après l'avoir résolu de nouveau par rapport à z, on fasse le radical égal à zéro, on exprimera que la droite des équations (2) et (3) est tangente au cylindre. Si de plus on suppose $z = 0$, on exprimera que cette droite passe par le point où la ligne des sommets rencontre le plan des x, y; on aura ainsi deux équations pour déterminer h et k : elles seront, en faisant pour abréger $\frac{dq' + ep'}{4A + 2Bq' + 2B'p'} = n$,

$$h(B'd - Be) + Cd - Bf - dn + Bn^2 = 0 \ldots\ldots (4),$$

$$k(Be - B'd) + Ce - B'f - en + B'n^2 = 0 \ldots\ldots (5).$$

Le plan diamètre principal devant passer par le point dont les coordonnées sont $x = h$, $y = k$, $z = 0$, il suit de ce qui précède qu'il sera

$$2Az + B(y - k) + B'(x - h) = 0 \ldots\ldots (6).$$

En combinant ce plan avec l'équation (A) n.° 15 de la surface, en se rappellant que $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, on trouve les équations de la ligne des sommets : en faisant $p'' = \frac{BC - 2AC'}{BC'' - B'C'}$; $q'' = \frac{2AC'' - B'C}{BC'' - B'C'}$, elles sont $x - h = p''z \ldots\ldots (7)$, $y - k = q''z \ldots\ldots (8)$.

En transportant l'origine au point où la ligne des sommets ren-

contre le plan des x, y, le plan passant par ce point et perpendiculaire à la ligne des sommets, aura pour équation

$$z = p_{,,} x + q_{,,} y \; \ldots\ldots \; (9).$$

(en faisant $x = x' + h$, $y = y' + k$, et supprimant ensuite les accens des variables) $p_{,,}$, $q_{,,}$ seront données par les équations (5) et (6) du n.° 15, en y changeant p' q, $p_{,}$ $q_{,}$ en p'' q'', $p_{,,}$ $q_{,,}$.

Ce plan (9) est celui de la parabole génératrice qui sert de base au cylindre : en le combinant avec le plan diamètre principal (6), qui étant rapporté à la nouvelle origine, est $z = p_{,} x + q_{,} y$, l'intersection est l'axe de la parabole, et l'on trouve pour ces équations en faisant $p''' = \frac{q_{,} - q_{,,}}{p_{,,} q_{,} - p_{,} q_{,,}}$; $q''' = \frac{p_{,,} - p_{,}}{p_{,,} q_{,} - p_{,} q_{,,}}$,

$$x = p''' z \; \ldots\ldots \; (10), \quad y = q''' z \; \ldots\ldots \; (11).$$

Ainsi nous avons déterminé 1.° la tangente perpendiculaire à la ligne des sommets par le moyen de p' et q' ; 2.° la ligne des sommets par p'' et q'' ; 3.° l'axe de la parabole par p''' et q'''. La position de ces trois axes principaux aurait pu se déduire aussi, quoique moins simplement, des formules du n.° 16.

25. *Paramètre de la parabole.* On le trouvera comme dans le n.° 17. Imaginons par la nouvelle origine S le plan des z, y, et par le point M, où il rencontre la parabole principale, une perpendiculaire MP, sur son axe. En appellant SM $=$ R, SP $=$ X, le paramètre que j'appelle $4f$, sera $4f = \frac{R^2}{X} - X$.

En appellant α', β', γ' les coordonnées du point M, et α'', β'', γ'' celles du point P, on aura $\alpha' = 0$, $R^2 = \gamma'^2 + \beta'^2 + 2\gamma'\beta' \cos \varepsilon$;

$$X = \sqrt{(\gamma''^2 + \beta''^2 + \alpha''^2 + 2\gamma''\beta'' \cos \varepsilon + 2\alpha''\gamma'' \cos \varepsilon' + 2\alpha''\beta'' \cos \varepsilon'')}.$$

On aura γ', β' en combinant le plan (9) avec l'équation (A) n.° 15 de la surface, dans laquelle $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, et qui

étant rapportée à la nouvelle origine, devient

$$(2Az+B(y+k)+B'(x+h)+C)^2 = d(y+k)+e(x+h)+f.$$

Dans ce calcul il faut observer qu'on a $x=0$, dans les deux équations, et que la seconde n'a pas de terme constant, parce que la nouvelle origine est sur la surface. On trouve

$$y=\beta'=\frac{d-2(2A+B)(Bk+B'h+C)}{q_{,}(2A+B)^2}\,;\ \gamma'=q_{,,}\beta'.$$

Pour avoir les coordonnées α'', β'', γ'', il faut concevoir par le point M de la parabole un plan perpendiculaire à son axe, c'est-à-dire à la droite des équations (10) et (11) : ce plan a pour équation

$$z-\gamma'=p_{,,,}x+q_{,,,}(y-\beta')\ \ldots\ldots (12):$$

en le combinant avec (10) et (11), on trouve

$$\gamma_{,,}=\frac{\gamma'-q_{,,,}\beta'}{1-p'''p_{,,,}-q'''q_{,,,}},\ \beta''=q'''\gamma'',\ \alpha''=p'''\gamma''.$$

On a ainsi toutes les valeurs des quantités qui entrent dans R et X, et par conséquent dans $4f$.

§. V.

CONE DROIT A BASE ELLIPTIQUE.

Pour avoir la forme et la position du cône, il faut connaître 1.° les coordonnées du sommet; 2.° l'équation de son axe; 3.° les deux plans qui passent par l'axe du cône et par chacun des axes de la base; 4.° la grandeur des deux axes de la base.

26. *Caractère du cône.* Le cône droit à base elliptique est engendré par le mouvement d'une droite assujettie à passer par un point fixe, et qui parcourt le périmètre d'une ellipse ou d'une parabole ou d'une hyperbole, qui ne sont pas dans le même plan que le point fixe : dans les trois cas, la surface est la même,

mais l'axe du cône est placé différemment. Cette surface s'appelle aussi cône oblique à base circulaire : le cône droit à base circulaire n'est qu'un cas particulier du premier.

Le cône oblique est une variété de l'hyperboloïde : il est le passage d'une espèce à l'autre : il est l'asymptote de tous deux : il est intérieur à l'hyperboloïde d'une nappe, et extérieur à celui de deux nappes : son sommet est à leur centre commun.

Tous les plans diamètres se coupent dans l'axe du cône : leurs intersections avec la surface sont deux droites qui se coupent au centre.

En prenant l'équation (1) n.° 9 pour celle de la surface, on trouvera les coordonnées du sommet comme dans cet article, et l'équation (2) sera celle du cône, l'origine étant prise au centre.

Il suit de-là que l'équation (2) n.° 9 étant résolue par rapport à z, le radical devra représenter deux droites se coupant au centre, ce qui exige les trois conditions $G = 0$;

$$(BB'-2AB'')^2 > (B^2-4AA')(B'^2-4AA''),\ B^2 > 4AA'.$$

27. *Équations de l'axe du cône.* Il suffit, pour les obtenir, de combiner deux plans diamètres : en faisant $p' = \frac{B^2-4AA'}{2A'B'-BB''}$, $q' = \frac{2AB''-BB'}{2A'B'-BB''}$, elles sont $x = p'z \ldots (3)$ $y = q'z \ldots (4)$.

Lorsqu'il arrivera que p' et q' seront $\frac{0}{0}$, on se conduira comme dans l'observation du n.° 22.

28. *Axes de la base et plans diamètres principaux.* J'appelle plans diamètres principaux les deux plans dont chacun contient l'axe du cône et l'un des axes de l'ellipse. Concevons par le sommet deux droites parallèles aux axes de l'ellipse, et par conséquent perpendiculaires entr'elles, ainsi qu'à l'axe du cône. Soient $x = p''z$,

$y=q''z$, et $x=p'''z$, $y=q'''z$ les équations de ces deux droites : il est un moyen, aussi simple qu'élégant, d'avoir les valeurs de $p''\ q''$, $p'''\ q'''$; en effet, si l'on fait $G=0$ dans les équations (5), (6), (7) n.° 10, r^2 disparaît, et elles deviennent du premier degré : en combinant (6) et (7), puis (5) et (6), et ensuite (5) et (7), les valeurs de p et q sont celles de $p'\ q'$ rapportées n.° 27, puis celles de $p''\ q''$, et enfin celles de $p'''\ q'''$ qui suivent $p''=\frac{2A'B'-BB''}{B''^2-4A'A''}$, $q''=\frac{2A''B-B'B''}{B''^2-4A'A''}$, $p'''=\frac{BB'-2AB''}{B'B''-2A''B'}$, $q'''=\frac{4AA''-B'^2}{B'B''-2A''B}$.

De-là on conclut aisément les deux plans diamètres principaux, qui sont $z(p''q'-p'q'')+y(p'-p'')+x(q''-q')=0 \ldots . (5)$

$$z(p'''q'-p'q''')+y(p'-p''')+x(q'''-q')=0 \ldots (6).$$

En combinant ces deux plans avec l'équation de la surface, qui est

$$Az^2+A'y^2+A''x^2+Bzy+B'zx+B''xy=0 \ldots\ldots (7),$$

on a les quatre arètes principales qui passent par les extrémités des axes de l'ellipse.

29. *Grandeur des axes de l'ellipse.* Je représente par

$$x=az \ldots\ldots (8) \quad y=bz \ldots\ldots (9)$$

l'une des deux arètes données par le plan (5), je représente de même par

$$x=a'z \ldots\ldots (10) \quad y=b'z \ldots\ldots (11)$$

l'une des deux arètes déterminées par le plan (6).

Cela posé, soit $z=p_{\prime}x+q_{\prime}y+1 \ldots\ldots (12)$ le plan de l'ellipse ($p_{\prime}\,q_{\prime}$ sont données par (5) et (6) n.° 15).

Les équations (3) et (4) de l'axe du cône combinée avec (12) donneront les coordonnées α, β, γ du centre de l'ellipse : (8) et (9) avec (12) donneront les coordonnées α', β', γ' de l'extrémité de l'un des axes de l'ellipse : (10), (11) et (12) donneront les coordonnées α'', β'', γ'' de l'extrémité de l'autre axe de l'ellipse.

Appelons R, R′, R″ les droites qui vont du sommet au centre et aux extrémités des deux axes de l'ellipse : on aura

$$R^2 = \gamma^2 + \beta^2 + \alpha^2 + 2\beta\gamma \cos \varepsilon + 2\alpha\gamma \cos \varepsilon' + 2\alpha\beta \cos \varepsilon''$$

$$R'^2 = \gamma'^2 + \beta'^2 + \alpha'^2 + 2\beta'\gamma' \cos \varepsilon + 2\alpha'\gamma' \cos \varepsilon' + 2\alpha'\beta' \cos \varepsilon''$$

$$R''^2 = \gamma''^2 + \beta''^2 + \alpha''^2 + 2\beta''\gamma'' \cos \varepsilon + 2\alpha''\gamma'' \cos \varepsilon' + 2\alpha''\beta'' \cos \varepsilon''.$$

Enfin on aura les deux demi-axes r'', r''' de l'ellipse par les équations suivantes $r'' = \sqrt{R'^2 - R^2}$, $r''' = \sqrt{R''^2 - R^2}$.

On pourra reconnaître à l'avance, que l'ellipse est un cercle, par la condition (b) n.° 12 des surfaces de révolution.

§. VI.

DES CAS OÙ IL N'Y A PAS DE SURFACES COURBES.

30. *Deux plans qui se coupent.* La proposée représente le système de deux plans, lorsqu'elle est décomposable en deux facteurs du premier degré. Lorsque cela a lieu, le radical de l'équation (A) n.° 15 est un quarré qui représente deux droites confondues : nous avons vu, n.° 8, dans quel cas une équation à deux variables exprime deux droites qui se confondent : en appliquant ces mêmes conditions à la quantité qui est sous le radical de (A) n.° 15, on voit qu'elles sont ici $b^2 = 4ac$, $bd = 2ae$, $d^2 = 4af$; quand elles ont lieu, l'équation (A) est le produit de deux facteurs, et peut s'écrire ainsi, $2Az + By + B'x + C \pm \frac{1}{2\sqrt{a}}(2ay + bx + d) = 0$.

Mais il faut observer que ces deux plans ne seront réels, qu'autant que a sera positif, c'est-à-dire qu'on doit avoir $B^2 > 4AA'$, et alors la proposée a l'apparence de l'hyperboloïde.

Lorsqu'on aura $a = 0$, on aura aussi $b = 0$, $d = 0$, et pour

éviter l'indétermination $\frac{0}{0}$, on employera, pour équation des plans, la forme suivante qui se déduit des conditions précédentes réunie à celle-ci, $e^2 = 4cf$,

$$2Az + By + B'x + C \pm \frac{1}{2\sqrt{c}}(2cx + e) = 0.$$

Monsieur *Biot* (Géométrie analytique n.° 257) a donné à l'équation des deux plans une forme qui l'a obligé à établir des conditions de signes dont la considération est embarrassante, et devient inutile par la forme que j'ai adoptée.

31. *Une ligne droite.* Lorsque la quantité a du numéro précédent est négative, les deux plans sont imaginaires; mais la proposée n'est pas pour cela absurde, car on satisfait à l'équation des deux plans, en la décomposant dans les deux qui suivent:

$$2Az + By + B'x + C = 0, \quad 2ay + bx + d = 0.$$

dont le lieu géométrique, ainsi que celui de la proposée, est une ligne droite, intersection de ces deux dernières équations. En les combinant, on a pour les équations de la droite dont il s'agit,

$$4Aaz + (2B'a - Bb)x - Bd + 2Ca = 0,$$

$$2Abz + (Bb - 2B'a)y - B'd + Cb = 0.$$

Tous les points qui sont sur la droite de ces deux équations donneront pour x, y, z des valeurs qui vérifieront la proposée. Aucun autre point de l'espace ne la satisfera.

32. *Deux plans parallèles.* Lorsque, outre les trois conditions du n.° 30, on aura de plus $a = 0$, $c = 0$, ou, ce qui reviendra au même, lorsqu'on aura à-la-fois $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$, $e = 0$, la proposée représentera deux plans parallèles. Cela se reconnaît à l'inspection de l'équation (A) n.° 15 : alors les deux plans sont compris dans cette équation $2Az + By + B'x + C \pm \sqrt{f} = 0$. Dans ce cas les trois plans diamètres ont la même équation.

53. *Un seul plan.* Lorsque les six quantités a, b, c, d, e, f, sont à la fois nulles, la proposée est un quarré : les deux plans se confondent en un seul qui a pour équation $2Az+By+B'x+C=0$.

54. *Un point unique.* La surface peut se réduire à un point unique qui est son centre : il faut pour cela que la proposée ait le caractère des surfaces fermées, et que de plus la section faite par un plan diamètre soit un seul point ; c'est-à-dire qu'ayant résolu l'équation (2) n.° 9 par rapport à z, il faut que la courbe en x, y, représentée par le radical, se réduise à un point unique. En adoptant la notation du n.° 15, il faudra que la proposée ait d'abord les caractères de l'ellipsoïde, et que de plus on ait $G=0$, c'est-à-dire $(bd-2ae)^2=(b^2-4ac)(d^2-4af)$, parce que l'on trouve

$$G=\frac{(bd-2ae)^2-(b^2-4ac)(d^2-4af)}{-16Aa(b^2-4ac)}.$$

Le cas du point unique est, comme on voit, une variété de l'ellipsoïde. Alors l'équation (8) n.° 10 donne $r=0$ à cause de $G=0$.

55. *Absurdité.* Enfin la proposée peut être absurde, ou ne représenter ni surfaces, ni ligne, ni point : 1.° il faut pour cela que le radical en xy de l'équation (2) n.° 9, résolu par rapport à z, soit une courbe imaginaire (V. n.° 5) : cela a lieu, quand la proposée a l'apparence ou les caractères de l'ellipsoïde, et que de plus G est positif, ou que $(bd-2ae)^2-(b^2-4ac)(d^2-4af)$ est négatif : alors l'intersection de la surface par le plan diamètre est une ellipse imaginaire.

2.° Il y a un second cas d'absurdité ; c'est celui où l'on a à-la-fois a, b, c, d, e nuls, et f négatif : on voit, par le résultat du n.° 52, qu'alors la proposée représente deux plans parallèles imaginaires.

3.° Le cylindre elliptique devient imaginaire, quand f est négatif.

Observation. La discussion complète de tous les cas que présente l'équation générale du deuxième degré à trois variables, exige, comme on a pu s'en convaincre, du discernement et de l'attention. Il faut d'abord reconnaître l'individu qu'exprime l'équation numérique; et pour cela, si D n'est pas nul, on est assuré que la surface a un centre. Ainsi elle est un ellipsoïde, un des deux hyperboloïdes, le cône à base elliptique, un point unique, ou un ellipsoïde imaginaire.

Ayant reconnu si la surface a un centre ou n'en a pas, il faudra vérifier les autres caractères, en commençant par les plus généraux. Quand on aura reconnu l'espèce de la surface, il sera aisé, en suivant les formules qui lui conviennent, d'assigner sa forme et sa position à l'égard des plans coordonnés. Si ces plans sont rectangulaires, les formules deviendront beaucoup plus simples. Il ne sera pas même nécessaire d'avoir recours à ces formules, lorsque les coordonnées étant rectangulaires, les rectangles zy, zx, xy manqueront dans la proposée : dans ce cas, en faisant disparaître les premières puissances des variables, la surface se trouvera rapportée à ses diamètres principaux et à son centre, si elle en a un.

Dans le cas général, la considération des traces, celle des plans diamètres, et celle de la projection des trois cylindres circonscrits seront très-propres à donner une idée nette de la forme et de la position de la surface; la note 35 contient des équations numériques pour exercer les élèves.

NOTES

SUR LES SECTIONS PREMIÈRE ET DEUXIÈME (*).

2. 1.° Pour que les deux valeurs de r^2 soient toujours réelles, il faut que la quantité qui est sous le radical de son expression, soit toujours positive : or on peut l'écrire ainsi :

$$(A-C)^2\sin^2\varepsilon+[B-(A+C)\cos\varepsilon]^2,$$

et l'on voit qu'étant composée de la somme de deux quarrés, elle est essentiellement positive.

2.° Si $y=p'x$ et $y=p''x$ sont les équations de deux droites perpendiculaires entr'elles, on sait que dans le cas des coordonnées rectangulaires on a la relation $p'p''+1=0$; mais si les coordonnées font entr'elles un angle ε, la relation analogue est plus composée : on peut la trouver par des moyens élémentaires ; le suivant est plus court.

La distance d'un point quelconque de la droite $y=p'x$ au point où elle coupe l'autre, c'est-à-dire à l'origine, est $\sqrt{y^2+x^2+2xy\cos\varepsilon}$, et elle doit être un *minimum* : on a donc

$$ydy+xdx+xdy\cos\varepsilon+ydx\cos\varepsilon=0,$$

en y substituant $p'dx$ pour dy, et p'' pour y, on a l'équation (9) du n.° 2.

3.° Supposons que les axes des coordonnées soient deux diamètres conjugués de la courbe, on aura $B=0$, et l'équation (4) n.° 2 deviendra $Ay^2+Cx^2+G=0$; en sorte que les quarrés des demi-diamètres conjugués seront $\frac{-G}{A}$, $\frac{-G}{C}$: la somme de ces quarrés sera

(*) Le nombre qui précède chaque note, est celui du n.° correspondant de la section.

donc $\frac{-G(A+C)}{AC}$: le produit de leurs quarrés par le quarré du sinus de l'angle qu'ils comprennent, ou, ce qui revient au même, le quarré de l'aire du parallélogramme construit sur leurs grandeurs et directions, sera $\frac{G^2 \sin^2 \varepsilon}{AC}$; mais dans la même hypothèse de $B=o$, l'équation (a) qui donne r^2 (V. le n.° 2) devient,

$$r^4 + G\frac{A+C}{AC}r^2 + \frac{G^2 \sin^2 \varepsilon}{AC} = o,$$

et par la théorie des équations $G\frac{A+C}{AC}$ est la somme des quarrés des deux demi-diamètres principaux, et $\frac{G^2 \sin^2 \varepsilon}{AC}$ est le produit des quarrés de ces diamètres.

Donc, dans les lignes du second ordre qui ont un centre, 1.° la somme des quarrés de deux demi-diamètres conjugués quelconques est égale à la somme des quarrés des deux demi-diamètres principaux; 2.° le parallélogramme construit sur les grandeurs et directions de deux demi-diamètres conjugués quelconques est équivalent au rectangle construit sur les grandeurs et directions des deux demi-diamètres principaux.

4. 1.° Pour démontrer que cette équation est celle des asymptotes, il faut mettre l'équation (4) n.° 2 sous la forme suivante :

$$y = x\left(-\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC - \frac{4AG}{x^2}}\right);$$

et d'y faire x et y infinis, ou anéantir le terme $\frac{-4AG}{x^2}$, parce qu'à l'extrémité de la courbe les coordonnées de la courbe et celles de l'asymptote sont les mêmes.

2.° Quand l'hyperbole est équilatère, les deux valeurs r'^2 et r''^2 sont égales, mais de signe contraire : cela a lieu, lorsque dans la valeur de r^2 on fait $A+C-B\cos\varepsilon = o$.

7. Le calcul différentiel est sans doute le plus court chemin, et en même tems celui qui conduit aux expressions les plus simples ; néanmoins, on peut désirer une méthode élémentaire pour les trois courbes du second degré. Voici celle qui me paraît préférable.

S'il s'agit de l'ellipse ou de l'hyperbole, on déterminera les coordonnées du centre, et on y transportera l'origine. Alors $y=p'x$ et $y=p''x$ seront les équations des deux axes : la relation de p' à p'' est donnée par l'équation (9) n.° 2 ; $y=p''x+d$ est l'équation d'une droite perpendiculaire au premier axe : elle sera aussi celle de la tangente à l'extrémité de cet axe, quand on aura déterminé d par la condition que la droite ne coupe la courbe, qu'en un point : cela se fait en combinant l'équation de la droite avec celle de la courbe, et égalant à zéro le radical de l'équation du deuxième degré qui en résulte. Ayant la valeur de d, on a aisément les coordonnées de l'extrémité de l'axe, ainsi que l'expression de l'axe lui-même et celle de p'.

Comme ces expressions ne sont par aussi simples que celles que j'ai rapportées n.° 2, il faudra démontrer leur identité (V. mes opuscules, pag. 25).

Pour la parabole, l'équation de l'axe sera $y=p'x+n$, et celle de sa tangente $y=p''x+n'$: ici p' et p'' sont tous deux connus, car $p'=\frac{-B}{2A}$, et p'' est donné par la relation (9) n.° 2 : on déterminera n' par la condition que la droite ne rencontre la courbe qu'en un seul point : on aura ainsi les coordonnées du sommet de l'axe : on aura aussi par conséquent la valeur de n et l'équation de l'axe.

On transportera l'origine au sommet S de l'axe : par le point M où le nouvel axe des y rencontre la courbe, si l'on imagine une perpendiculaire MP sur l'axe de la parabole, en appelant SM$=$R, SP$=$X, et le paramètre $=4f$, on aura $4f=\frac{R^2}{X}-X$: on aura R

en faisant $x=0$, dans l'équation de la courbe rapportée au sommet S; car alors $R=y$: on aura X en calculant les coordonnées de P, et celle-ci en combinant l'équation de l'axe $y=p'x$ avec celle de la droite MP, qui est $y=p''x+R$. Les détails de cette solution sont faciles, mais il faudra prouver l'identité des résultats avec ceux plus simples des numéros 6 et 7 (V. mes opuscules, pag. 70).

J'ai donné, pag. 75 de mes opuscules, une méthode graphique fort simple pour construire l'équation à la parabole : ayant résolu la proposée par rapport à y, on construit le diamètre $2Ay+Bx+D=0$, et l'ordonnée tangente qui est donnée par le radical égalé à zéro, laquelle a pour équation $2(BD-2AE)x+D^2-4AF=0$: l'intersection de ces deux droites donne un premier point de contact. La résolution de la proposée par rapport à x donne un second diamètre $2Cx+By+E=0$, une seconde ligne tangente $2(BE-2CD)y+E^2-4CF=0$, et un second point de contact par leur intersection.

Par les deux points de contact on mène deux rayons vecteurs, qui font, avec les tangentes, des angles égaux à ceux que font les deux diamètres. L'intersection de ces rayons vecteurs donne le foyer par lequel on mène l'axe parallèlement aux deux diamètres. Enfin on trouve le sommet, en abaissant de l'un des points de contact une perpendiculaire sur l'axe, et prenant la moitié de la sous-tangente. Si les deux rayons vecteurs se confondent par hasard, ce qui arrivera quand les coordonnées seront rectangulaires, la construction deviendra plus simple, et l'on trouvera le foyer qui sera alors placé sur la ligne des deux contacts, en menant par le point de concours des deux tangentes une perpendiculaire sur cette ligne des contacts. Cela est fondé sur ce que, quand un angle droit roule en touchant une parabole, le sommet de l'angle parcourt la directrice, la ligne des contacts passe par le foyer, ainsi que la perpendiculaire menée de l'angle sur cette ligne.

10. 1.° Si par le point que l'on considère dans l'espace, on conçoit trois plans parallèles aux trois plans coordonnés, on aura un parallélipipède obliquangle, dont les trois arètes z, y, x font entr'elles les angles ε, ε', ε''; il s'agit de trouver l'expression de la diagonale r de ce parallélipipède : il faut concevoir par les deux diagonales d, d' du parallélogramme de la base, et par le point que l'on considère dans l'espace, deux triangles dont la commune section est la droite c qui joint le point en question avec le centre de la base : cette droite passe par le milieu des deux diagonales. Cette propriété fournit, en vertu d'une proposition élémentaire, deux équations : les deux triangles de la base en fournissent deux autres : les deux faces adjacentes au point en question en donnent deux pour l'expression des diagonales d'', d''' de ces faces : on a ainsi six équations dont l'élimination fournit très-simplement l'expression cherchée de r. C'est aussi celle de la résultante de trois forces z, y, x, qui ne sont pas dans le même plan, et qui font entr'elles des angles ε, ε', ε'': voici les six équations qu'il faut combiner:

$$d''^2+d'''^2=2c^2+\tfrac{1}{2}d'^2\,;\quad r^2+z^2=2c^2+\tfrac{1}{2}d^2\,;\quad d^2=x^2+y^2+2xy\cos\varepsilon''\,;$$

$$d'^2=x^2+y^2-2xy\cos\varepsilon''\,;\quad d''^2=y^2+z^2+2zy\cos\varepsilon\,;\quad d'''^2=x^2+z^2+2xz\cos\varepsilon'.$$

2.° Les diamètres conjugués des surfaces du deuxième degré ont des propriétés remarquables et analogues à celles des diamètres conjugués des sections côniques : ces propriétés se démontrent d'une manière directe et simple par l'équation (8) n.° 10.

Supposons que les axes des coordonnées soient trois diamètres conjugués ; alors on devra faire $B=0$, $B'=0$, $B''=0$ dans l'équation (2) n.° 9, qui deviendra $Az^2+A'y^2+A''x^2+G=0$: les quarrés des demi-diamètres conjugués seront donc respectivement $\frac{-G}{A}, \frac{-G}{A'}, \frac{-G}{A''}$.

L'équation (8), à cause de $B=0$, $B'=0$, $B''=0$, deviendra

$$r^6 + r^4\left(\frac{G}{A}+\frac{G}{A'}+\frac{G}{A''}\right) + r^2\left(\frac{G}{A}\cdot\frac{G}{A'}\cdot\sin.^2\varepsilon + \frac{G}{A}\cdot\frac{G}{A''}\cdot\sin.^2\varepsilon' + \frac{G}{A'}\cdot\frac{G}{A''}\cdot\sin.^2\varepsilon''\right) + \frac{G}{A}\cdot\frac{G}{A'}\cdot\frac{G}{A''}\left(1-\cos^2\varepsilon-\cos^2\varepsilon'-\cos^2\varepsilon''+2\cos\varepsilon\cos\varepsilon'\cos\varepsilon''\right)=0;$$

d'où l'on voit par la théorie des équations, que le coëfficient du second terme r^4 pris avec un signe contraire est la somme des quarrés des demi-diamètres principaux; que le coëfficient du troisième terme r^2 est la somme des produits de ces quarrès deux-à-deux; qu'enfin le dernier terme pris avec un signe contraire est le produit de ces mêmes quarrés ou le quarré du produit des demi-diamètres principaux : on en conclut aisément le théorème qui suit :

» Premièrement, dans les surfaces du second ordre qui ont un centre, la somme des quarrés des trois demi-diamètres conjugués quelconques est égale à la somme des quarrés des trois demi-diamètres principaux ;

Secondement, la somme des quarrés des aires des trois faces adjacentes à l'un des angles trièdres du parallélipipède construit sur les grandeurs et directions des trois demi-diamètres conjugués, est égale à la somme des quarrés des aires des trois faces adjacentes à l'un des angles trièdres du parallélipipède rectangle construit sur les grandeurs et directions des trois demi-diamètres principaux ;

Troisièmement, enfin le parallélipipède construit sur les grandeurs et directions des trois demi-diamètres conjugués quelconques est équivalent au parallélipipède rectangle construit sur les grandeurs et directions des trois demi-diamètres principaux ».

Ainsi en désignant, pour plus de simplicité, par a, b, c les trois demi-diamètres principaux, et par a', b', c' trois demi-diamètres conjugués quelconques, on aura, pour la traduction algébrique du théorème, les trois équations : $a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2$;

$$b'^2c'^2\sin^2\varepsilon + c'^2a'^2\sin^2\varepsilon' + a'^2b'^2\sin^2\varepsilon'' = b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2;$$

$$a'^2b'^2c'^2(1-\cos^2\varepsilon-\cos^2\varepsilon'-\cos^2\varepsilon''+2\cos\varepsilon\cos\varepsilon'\cos\varepsilon'') = a^2b^2c^2;$$

sur quoi il faut remarquer que quelques-unes des lignes a, b, c; a', b', c' peuvent être imaginaires, et qu'alors leurs quarrés sont négatifs.

15. Ce problème peut être résolu par des moyens élémentaires, mais moins brièvement que par le suivant. Le plan de l'équation (4) est la base d'une pyramide triangulaire dont l'origine des coordonnées est le sommet : la droite des équations $x=p'z$ et $y=q'z$ est la hauteur de cette pyramide : il faut exprimer que cette droite est la plus courte de toutes celles qu'on peut mener du sommet à la base. La longueur de la droite qui doit être un *minimum*, est

$$\sqrt{(z^2+y^2+x^2+2zy\cos\varepsilon+2zx\cos\varepsilon'+2xy\cos\varepsilon'')}:$$

sa différentielle égalée à zéro est

$$dz(z+y\cos\varepsilon+x\cos\varepsilon')+dy(y+z\cos\varepsilon+x\cos\varepsilon'')+dx(x+z\cos\varepsilon'+y\cos\varepsilon'')=0.$$

Après y avoir mis $p_{\prime}dx+q_{\prime}dy$ pour dz, j'égale à zéro le multiplicateur de dy et celui de dx, il vient deux équations qui, en y mettant $p'z$ pour x et $q'z$ pour y, sont précisément (5) et (6) du n.° 15.

Autrement, je mets dans l'équation différentielle $p'dz$ pour dx, $q'dz$ pour dy, et $p_{\prime}x+q_{\prime}y$ pour z : ensuite j'égale à zéro tous les termes en x et tous ceux en y : il en résulte les relations cherchées.

55. Si dans l'équation numérique en z', y', x' d'une surface rapportée à ses diamètres principaux ou à des parallèles on substitue pour z', y', x' les valeurs suivantes :

$$z'=\tfrac{1}{3}(-x+2y+2z)\,,\ y'=\tfrac{1}{3}(2x-y+2z)\,,\ x'=\tfrac{1}{3}(2x+2y-z)\,,$$

qui satisfont aux formules de la transformation des coordonnées, la tranformée exprimera la même surface située différemment : on peut ainsi, sans tâtonnement, faire une équation d'une espèce donnée. En voici des exemples.

Ellipse : $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$; $3y^2+xy+2x^2-23y-23x+82=0$.

Hyperbole : $a^2y^2-b^2x^2=a^2b^2$; $y^2-2xy-x^2+y-2x+1=0$.

Parabole : $y^2\pm ax=0$; $y^2+2xy+x^2-8y+2x+1=0$.

Ellipsoïde : $b^2c^2z^2+a^2c^2y^2+a^2b^2x^2=a^2b^2c^2$. Exemple :
$13z^2+13y^2+10x^2+8zy-4zx-4xy-4z-4y+20x+1=0$.

Hyperboloïde d'une nappe : $b^2c^2z^2+a^2c^2y^2-a^2b^2x^2=a^2b^2c^2$. Ex.
$6z^2-3y^2-3x^2+12zy+12zx-24xy+12z-24y-6x-12=0$.
Hyperboloïde à deux nappes : $b^2c^2z^2-a^2c^2y^2-a^2b^2x^2=a^2b^2c^2$. Ex.
$3z^2+3y^2-6x^2+24zy-12zx-12xy-12z-12y-12x-15=0$.

Paraboloïde elliptique : $a^2z^2+b^2y^2=\pm Px$. Exemple :
$8z^2+5y^2+5x^2+4zy+4zx-8xy-3z+6y+6x=0$.

Paraboloïde hyperbolique à paramètres égaux : $a^2z^2-b^2y^2=\pm Px$. Ex.
$3y^2-3x^2+12zy-12zx-3z+6y+6x=0$.

Les trois cylindres : $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$; $a^2y^2-b^2x^2=a^2b^2$; $y^2=ax$, en changeant les axes.
Elliptique : $9z^2+6y^2+12x^2-12zy+12zx+12z+24x+3=0$.
Hyperbolique : $7z^2-2y^2+4x^2-4zy+20zx-16xy+20z-16y+8x-5=0$.
Parabolique : $4z^2+y^2+4x^2-4zy+8zx+4xy+5z+10y+14x+10=0$.

Cône : $a^2b^2z^2=a^2c^2y^2+b^2c^2x^2$;
$2z^2+5y^2+11x^2-20zy+4zx+16xy+4z+16y+22x+11=0$.

Un seul point : $b^2c^2z^2+a^2c^2y^2+a^2b^2x^2=0$.
La même transformée ci-après :
$13z^2+13y^2+10x^2+8zy-4zx-4xy-4z-4y+20x+10=0$.

Équation impossible : $b^2c^2z^2+a^2c^2y^2+a^2b^2x^2+a^2b^2c^2=0$. Ex.
$13z^2+13y^2+10x^2+8zy-4zx-4xy-4z-y+20x+19=0$.

Deux plans : $z^2+y^2+x^2+2zy+2zx+2xy+z+y+x-2=0$.

PROBLÈME I.er

Une courbe du deuxième degré ou une surface du même degré étant donnée de forme et de position, trouver son équation numérique par rapport à des axes donnés de position.

Ce problème est l'inverse de celui qui a pour objet de construire une équation donnée; mais il ne présente aucune difficulté. Cependant comme il est utile aux élèves de vérifier l'exactitude des constructions de la manière la plus simple, j'ai cru à propos de placer ici une solution qui m'a paru d'une application plus facile que celle qui se trouve dans les *Annales de Mathématiques*, tom. I, pag. 180 et 253 ; en effet, celle-ci employe les diamètres passant par les points de contact du parallélogramme circonscrit à la courbe: il en résulte que les lignes qu'il faut mesurer, peuvent, dans certains cas, être fort grandes et tomber hors du papier : en outre, la considération des lignes imaginaires oblige à des distinctions qu'il est utile d'épargner.

1.° *Ellipse.* Par le centre C de l'ellipse donnée mener deux demi-diamètres $CX=a$, $CY=b$, parallèles aux deux axes donnés et auxquels il s'agit de rapporter l'ellipse proposée. Enfin par l'extrémité du diamètre CX mener une ordonnée $XY'=b'$ qui rencontre la courbe en un point Y'.

L'équation de l'ellipse rapportée aux axes CX et CY sera de cette forme,

$$Ay^2+Bxy+Cx^2=1 \ldots\ldots (1) :$$

équation qui doit être satisfaite par les substitutions des trois couples de valeurs, $x=0$, $y=b$ ...... $x=a$, $y=0$ ...... $x=a$, $y=b'$.

On en tire $A=\frac{1}{b^2}$, $C=\frac{1}{a^2}$, $B=\frac{-b'}{ab^2}$. Par la substitution des

valeurs de A, B, C, l'équation (1) devient

$$a^2y^2 - ab'xy + b^2x^2 = a^2b^2 \ldots\ldots (2).$$

Enfin, appelant α et β les coordonnées connues du centre C de l'ellipse rapportée aux axes donnés de position, l'équation de l'ellipse par rapport à ces axes sera

$$a^2(y-\beta)^2 - ab'(y-\beta)(x-\alpha) + b^2(x-\alpha)^2 = a^2b^2 \ldots\ldots (3),$$

dans laquelle il ne reste plus qu'à substituer pour a, b, b', α, β, les grandeurs numériques que l'on aura mesurées.

J'ai supposé que le centre C de l'ellipse était dans le cadran positif des axes donnés de position. Lorsque l'ordonnée b' ou le point Y′ tombera entre le diamètre CX et l'axe donné des x, cette ligne b' devra être prise négativement.

On pourra employer la même méthode pour l'hyperbole, quand les axes CX, CY rencontreront tous deux la courbe ; mais, quand un seul ou aucun ne la rencontrera, on fera usage de la méthode suivante.

2.° *Méthode commune aux trois courbes.* Par un point quelconque O de la courbe, mener deux cordes OX, OY, indéfinies et parallèles aux axes donnés de position. L'équation de la courbe rapportée au point O sera de cette forme,

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + x = 0 \ldots\ldots (1).$$

Si par le milieu de chaque corde et par le centre de l'ellipse on mène deux diamètres, ils auront pour équation

$$2Ay + Bx + D = 0 \ldots\ldots (2), \quad 2Cx + By + 1 = 0 \ldots\ldots (3),$$

(on les obtient en différenciant (1)).

Soient a, b, et a', b' les portions des axes OX, OY, interceptées par chacun des diamètres prolongés (2) et (3) : en faisant alternativement $x = 0$, $y = b$, $x = a$, $y = 0$ dans (2), et

$x=0$, $y=b'$, $x=a'$, $y=0$ dans (3), on a $2Ab+D=0$; $Ba+D=0$; $Bb'+1=0$; $2Ca'+1=0$. Mettant dans (1) pour A, B, C, D, les valeurs qui résultent des quatre dernières équations, il vient pour l'équation de la courbe rapportée au point O,

$$aa'y^2+2a'bxy+bb'x^2-2aa'by-2a'bb'x=0 \quad \ldots\ldots (4).$$

Donc, en appelant α et β les coordonnées du point O, par rapport aux axes donnés de position, l'équation cherchée sera

$$aa'(y-\beta)^2+2a'b(y-\beta)(x-\alpha)+bb'(x-\alpha)^2-2aa'b(y-\beta)-2a'bb'(x-\alpha)=0 \,.(5)$$

dans laquelle il ne reste qu'à substituer pour a, a', b, b', α, β, les valeurs numériques qui auront été mesurées.

Comme le point O est arbitraire (pourvu cependant que les cordes ci-dessus ne soient pas nulles), il sera bon que l'un des axes OX, OY passe par le centre de l'ellipse ou de l'hyperbole, si la chose se peut : alors des quatre quantités a, a' et b, b' deux seront égales; ce qui simplifiera l'équation (5).

Quant à la parabole, en prenant le point O à égale distance des deux diamètres parallèles de la courbe qui passe par le point de contact de l'ordonnée et de l'abscisse tangente on aura $a'=-a$, $b'=-b$, et l'équation (5) deviendra

$$[a(y-\beta)+b(x-\alpha)]^2-2a^2b(y-\beta)-2ab^2(x-\alpha)=0\,,$$

et l'on n'aura que quatre mesures à prendre au lieu de six, parce qu'on a toujours $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$.

5.° *Autre méthode pour les trois courbes.* On peut se dispenser d'employer les diamètres de la courbe. Pour cela menez par un point quelconque O de la courbe, 1.° une corde $=a$ parallèle à l'axe donné des x, et à l'extrémité de celle-ci une autre corde $=b$ parallèle à l'axe des y; 2.° par le même point O une troisième corde $=b'$ parallèle à l'axe des y, et à son extrémité une quatrième corde $=a'$ parallèle à l'axe des x.

L'équation de la courbe rapportée au point O sera de cette forme :

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+x=0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (1),$$

et elle doit être satisfaite par ces quatre couples de valeurs, 1.° $x=0$, $y=b'$; 2.° $x=a$, $y=0$; 3.° $x=a$, $y=b$; 4.° $x=a'$, $y=b'$. On a ainsi quatre équations pour déterminer A, B, C, D. Enfin, appelant α et β les coordonnées du point O par rapport aux axes donnés de position, on trouve pour l'équation de la courbe,

$$a(a'-a)(y-\beta)^2+(a'-a)(b'-b)(y-\beta)(x-\alpha)-b'(b'-b)(x-\alpha)^2-ab'(a'-a)(y-\beta)$$
$$+ab'(b'-b)(x-\alpha)=0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (2).$$

Dans le cas de la parabole, on a $B^2=4AC$, la corde a' est inutile, et l'on a

$$[2a(y-\beta)+(b'-b)(x-\alpha)]^2-4a^2b'(y-\beta)-a(b'-b)^2(x-\alpha)=0.$$

4.° *Pour les surfaces courbes.* L'équation de la surface rapportée à un point O, pris arbitrairement sur cette surface et à des axes parallèles à ceux qui sont donnés de position, est de cette forme :

$$Az^2+A'y^2+A''x^2+Bzy+B'zx+B''xy+Cz+C'y+x=0 \;.\;.\;.\;.\; (1).$$

Les trois plans diamètres que l'on obtient par la différenciation, sont :

$$2Az+By+B'x+C=0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (2);$$
$$2A'y+Bz+B''x+C'=0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (3);$$
$$2A''x+B'z+B''y+1=0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (4).$$

On construit chacun d'eux, en le faisant passer par les milieux des trois cordes qui ne sont pas dans le même plan, et qui sont parallèles à un même plan coordonné.

Ces trois plans diamètres coupent chacun des axes des coordonnées en trois points ; ce qui fait en tout neuf intersections dont il faut mesurer les distances à l'origine O.

Soient a, b, c les distances des intersections du plan (2) avec les axes des x, des y et des z; soient de même a', b', c' : a'', b'', c'' les distances analogues formées par les plans (3) et (4), on aura les neuf équations qui donnent ces distances, en faisant alternativement deux variables égales à zéro dans les équations (2), (3), (4); ce qui donnera $B'a+C=0$, $Bb+C=0$, $2Ac+C=0$, $B''a'+C'=0$, $2A'b'+C'=0$, $Bc'+C'=0$; $2A''a''+1=0$; $B''b''+1=0$, $B'c''+1=0$.

Tirant de ces équations les valeurs des coëfficiens A, A'....., et appelant α, β, γ les coordonnées de l'origine O par rapport aux trois axes donnés de position, on verra que l'équation de la surface rapportée à ces axes est

$$\frac{a}{2cc''}(z-\gamma)^2+\frac{a'}{2b'b''}(y-\beta)^2+\frac{1}{2a''}(x-\alpha)^2+\frac{a'}{b''c'}(z-\gamma)(y-\beta)$$
$$+\frac{1}{c''}(z-\gamma)(x-\alpha)+\frac{1}{b''}(y-\beta)(x-\alpha)-\frac{a}{c''}(z-\gamma)-\frac{a'}{b''}(y-\beta)$$
$$-(x-\alpha)=0.$$

Dans l'emploi de cette formule il faudra avoir égard aux signes des lignes mesurées. Si l'on demandait l'équation d'un point conjugué, on voit que sur un plan elle serait $(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=0$, et dans l'espace $(z-\gamma)^2+(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=0$.

Observations. Pour trouver les huit coëfficiens A, A'..., nous avions neuf équations, et par conséquent une d'inutile. En employant cette dernière, on arrive à l'équation identique $ab''c'=a'bc''$, qui diminue d'une unité le nombre des lignes a, a'..... nécessaires. Cette relation est un théorème qui peut avoir son utilité.

5.° *Autre méthode pour les surfaces.* On peut éviter l'embarras de construire les plans diamètres. Soit toujours

$$Az^2+A'y^2+A''x^2+Bzy+B'zx+B''xy+Cz+C'y+x=0\dots(1).$$

l'équation de la surface rapportée au point O pris sur cette surface. 1.° Menez par le point O, dans le plan des x, y une première corde $= a$ sur l'axe des x; à l'extrémité de celle-ci une seconde corde $= b$ parallèle à l'axe des y, au point O, sur l'axe des y, une troisième corde $= b'$, à l'extrémité de celle-ci une quatrième corde $= a'$ parallèle aux x; 2.° dans le plan des x, z, menez à l'extrémité de la corde a une cinquième corde $= c$ parallèle à l'axe des z, au point O, sur l'axe des z une sixième corde $= c'$, et à l'extrémité de celle-ci une septième corde $= a''$ parallèle à l'axe des x.

La trace faite dans le plan des x, y aura pour équation

$$A'y^2 + A''x^2 + B''xy + C'y + x = 0 \quad \ldots\ldots (2):$$

et celle faite dans le plan des z, x sera

$$Az^2 + A''x^2 + B'zx + Cz + x = 0 \quad \ldots\ldots (3).$$

On trouvera par la méthode du 3.° ci-devant les valeurs des coëfficiens des équations des traces, pour qu'elles passent par les huit points déterminés par les sept cordes : savoir cinq points dans chaque plan coordonné, mais deux communs aux deux plans; on trouvera

$$A = \frac{a''-a}{c'(c'-c)};\ A' = \frac{a'-a}{b'(b'-b)};\ A'' = \frac{-1}{a};\ B' = \frac{a''-a}{ac'};\ B'' = \frac{a'-a}{ab'};$$

$$C = \frac{a-a''}{c'-c};\ C' = \frac{a-a'}{b'-b}.$$

Nous n'avons encore trouvé que sept des huit coëfficiens de l'équation (1), parce que les deux plans des x, y, et z, x n'ont pu fournir que sept cordes. Pour déterminer le coëfficient B qui ne se trouve pas dans les équations (2) et (3), il faut imaginer une huitième corde $= c''$ élevée à l'extrémité de la corde b' parallèlement à l'axe des z. En ce point on a $x = 0$, $y = b'$, $z = c''$. Mettant ces valeurs dans l'équation (1), on déterminera B par la suivante où tout est connu, $Ac''^2 + A'b'^2 + Bb'c'' + Cc'' + C'b' = 0$.

Enfin, appelant α, β, γ les coordonnées du point O, à l'égard des axes donnés de position, l'équation de la surface par rapport à ces axes sera

$$A(z-\gamma)^2+A'(y-\beta)^2+A''(x-\alpha)^2+B(z-\gamma)(y-\beta)+B'(z-\gamma)(x-\alpha)$$
$$+B''(y-\beta)(x-\alpha)+C(z-\gamma)+C'(y-\beta)+(x-\alpha)=0.$$

J'observerai que les méthodes du 3.° et du 5.° sont plus commodes et par conséquent préférables.

PROBLÈME II.

Inscrire dans un quadrilatère l'ellipse la plus grande.

On trouve l'énoncé de ce problème dans les récréations mathématiques (édition de Montucla), et l'Auteur prévient le lecteur, qu'il exige, pour être résolu, la plus grande connaissance de l'analyse : cependant on va voir qu'on peut déduire de la théorie que j'ai donné de la construction des sections côniques, une solution très-simple.

Soit α et β les coordonnées du centre de l'ellipse cherchée : en rapportant la courbe à des axes parallèles à deux des côtés du quadrilatère, et passant par le centre, son équation sera de cette forme :

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+1=0\ \ldots\ldots\ (1).$$

Il s'agit de déterminer α, β, et les coëfficiens indéterminés A, B, C: l'ellipse doit satisfaire à cinq conditions, de toucher les quatre côtés du quadrilatère, et d'être la plus grande possible.

1.° Pour exprimer que l'ellipse touche le côté du quadrilatère qui est parallèle à l'axe des y, il faut faire $x=-\alpha$ dans l'équation (1), et l'ayant résolu par rapport à y, égaler le radical à zéro : il en résulte l'équation,

$$\alpha^2(B^2-4AC)=4A\ \ldots\ldots\ (2).$$

2.° On exprimera de même que l'ellipse touche le côté du quadrilatère qui est parallèle à l'axe des x, en écrivant l'équation,

$$\beta^2(B^2-4AC)=4C \ldots\ldots (3).$$

3.° Soient $hy'+gx'+1=0$, et $h'y'+g'x'+1=0$ les équations connues des deux autres côtés du quadrilatère (les deux premiers étant pris pour axes des coordonnées x', y') : les équations de ces troisième et quatrième côtés, l'origine étant prise au centre de l'ellipse, seront $h(y+\beta)+g(x+\alpha)+1=0$,

$$h'(y+\beta)+g'(x+\alpha)+1=0.$$

En combinant chacune de ces dernières équations avec (1), et égalant les radicaux à zéro, on exprime que l'ellipse touche les troisième et quatrième côtés du quadrilatère. Il en résulte les relations suivantes entre les coëfficiens indéterminés :

$$(B^2-4AC)(1+h\beta+g\alpha)^2=4(Ag^2+Ch^2-Bgh)$$

$$(B^2-4AC)(1+h'\beta+g'\alpha)^2=4(Ag'^2+Ch'^2-Bg'h').$$

On les simplifie par le moyen des équations (2) et (3), et en faisant pour abréger,

$$m=1+2g\alpha+2h\beta+2gh\alpha\beta\,;\; m'=1+2g'\alpha+2h'\beta+2g'h'\alpha\beta,$$

elles deviennent

$$(B^2-4AC)m=-4ghB \ldots\ldots (4),$$

$$(B^2-4AC)m'=-4g'h'B \ldots\ldots (5).$$

4.° J'ai démontré (V. le n.° 2) que le produit des demi-axes de l'ellipse est $\frac{-2\sin.\varepsilon}{\sqrt{4AC-B^2}}$, ε étant l'angle des coordonnées. L'ellipse sera donc la plus grande possible, si l'on a

$$d(B^2-4AC)=0 \ldots\ldots (6).$$

Ayant trouvé les équations (2), (3), (4), (5), (6) du problème, je procède ainsi qu'il suit.

Je différencie ces équations, en observant que B^2-4AC est une quantité constante : les trois dernières deviennent,

$$(B^2-4AC)(gd\alpha+hd\beta+gh\beta d\alpha+gh\alpha d\beta)=-2ghdB \ldots\ldots (7)$$

$$(B^2-4AC)(g'd\alpha+h'd\beta+g'h'\beta d\alpha+g'h'\alpha d\beta)=-2g'h'dB \ldots (8)$$

$$4BdB=(B^2-4AC)^2(\alpha^2\beta d\beta+\beta^2\alpha d\alpha) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Pour éliminer dB je multiplie membre en membre (4), (7), (9), et il vient,

$$m(gd\alpha+hd\beta+gh\beta d\alpha+gh\alpha d\beta)=2g^2h^2(\alpha^2\beta d\beta+\beta^2\alpha d\alpha) \ldots (10).$$

En vertu des (4) et (5) on a la relation $g'h'm=ghm'$, ou

$$g'h'(1+2g\alpha+2h\beta)=gh(1+2g'\alpha+2h'\beta) \ldots\ldots (11).$$

Je différencie cette équation, et je la combine avec (10) pour éliminer $d\alpha$ et $d\beta$: il vient une équation finie, dans laquelle je substitue pour β sa valeur tirée de (11), et qui étant divisée par le facteur $(h'-h)$, devient enfin

$$12gg'(gh'-g'h)\alpha^2+4(g^2h'-g'^2h+2gg'h'-2gg'h)\alpha+g'h'-gh+2gh'-2g'h$$
$$=0 \ldots\ldots\ldots (12).$$

Ayant trouvé α par cette équation, on déterminera β par l'équation (11).

Il reste à trouver A, C, B : pour cela je combine (2) et (5) avec (4), et j'en tire $B=\frac{-mA}{gh\alpha^2}$ et $B=\frac{-mC}{gh\beta^2}$. Je remets ces valeurs de B dans (2) et (5) : il en résulte deux équations entre A et C, desquelles on tire $A=\frac{4g^2h^2\alpha^2}{m^2-4g^2h^2\alpha^2\beta^2}$; $C=\frac{4g^2h^2\beta^2}{m^2-4g^2h^2\alpha^2\beta^2}$. On a ensuite $B=\frac{-mA}{gh\alpha^2}$: on a aussi la valeur de B par les équations (2) et (5).

Ayant les valeurs de A, B, C, il sera facile de construire

l'ellipse cherchée de l'équation (1); sur quoi il faut remarquer que l'équation (12) donnant deux valeurs pour α, d'où il en résulte aussi deux pour β, A, B, C, ces secondes valeurs fourniront une hyperbole qui touchera les prolongemens des côtés du quadrilatère, et dont le produit des axes sera un *maximum.*

Appliquons les formules trouvées au cas où le quadrilatère est un parallélogramme. Soient a et b les côtés parallèles aux axes des x et des y; l'équation du troisième côté sera $y'=b$, et celle du quatrième $x'=a$: on aura donc $g=0$, $h=\frac{-1}{b}$; $g'=\frac{-1}{a}$, $h'=0$.

Substituant ces valeurs dans (12), on trouve $\alpha=\frac{a}{2}$. On tire ensuite de (11) $\beta=\frac{b}{2}$, puis $m=0$, $A=\frac{-4}{b^2}$, $C=\frac{-4}{a^2}$; d'où, par les équations (2) ou (3), B=0. Il s'ensuit que l'équation de l'ellipse est

$$4a^2y^2+4b^2x^2-a^2b^2=0.$$

Ainsi elle a son centre à l'intersection des deux diagonales du parallélogramme, et elle touche les côtés dans leurs milieux.

PROBLÈME III.

Inscrire dans un triangle la plus grande ellipse.

Ce problème devient facile après le précédent. Les équations du problème sont (1), (2), (3), (4), (6) du précédent; mais (5) n'a pas lieu, puisque le quatrième côté du quadrilatère est nul. Voici comment il faut procéder.

J'égale séparément à zéro les multiplicateurs de $d\alpha$ et $d\beta$ dans l'équation (10), et il vient,

$$mg(1+2h\beta)-2g^2h^2\alpha\beta^2=0,\quad mh(1+2g\alpha)-2g^2h^2\alpha^2\beta=0.$$

Je retranche la seconde multipliée par β de la première multipliée par α, et j'en tire $g\alpha=h\beta$, laquelle étant combinée avec l'une des deux précédentes fournit la suivante (après avoir remis pour m sa valeur) $6g^2\alpha^2+5g\alpha+1=0$. De celle-ci on tire $\alpha=\frac{-1}{2g}$ et $\alpha=\frac{-1}{3g}$. On démontre facilement que la dernière valeur $\alpha=\frac{-1}{3g}$ est celle qui appartient au *maximum*. La valeur correspondante de β est $\beta=\frac{-1}{3h}$: on trouve ensuite $m=\frac{-1}{9}$, et par les expressions rapportées de A, B, C on conclut $A=-12h^2$, $C=-12g^2$, $B=-12gh$.

Il suit de ces valeurs que, si a, b sont les côtés du triangle parallèles aux coordonnées x, y, on aura $g=\frac{-1}{a}$, $h=\frac{-1}{b}$, et l'équation de l'ellipse sera $12a^2y^2+12abxy+12b^2x^2=a^2b^2$.

On déduit aisément de cette équation et des valeurs de α, β, que le centre de l'ellipse coïncide avec le centre de gravité du triangle, et que l'ellipse touche les trois côtés dans leurs milieux, résultat assez remarquable.

PROBLÈME IV.

Trouver une section cônique qui remplisse cinq conditions, de toucher des droites ou de passer par des points donnés.

L'équation générale du deuxième degré renfermant cinq coëfficiens indéterminés, on peut assujettir une section cônique à remplir cinq conditions, pourvu qu'elles ne soient pas contradictoires ou absurdes. Pour fixer les idées, 1.° supposons d'abord qu'il s'agisse d'inscrire dans un quadrilatère une ellipse qui passe de plus par un point donné.

En prenant un des angles du quadrilatère pour origine et les

coordonnées parallèles aux côtés de cet angle, l'équation de la courbe sera de cette forme,

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+1=0 \ldots\ldots (1)$$

Soient $x=0 \ldots (2)$, $y=0 \ldots (3)$, $hy+gx=1 \ldots (4)$, $h'y+g'x=1 \ldots\ldots (5)$, les équations connues des quatre côtés du quadrilatère.

Pour exprimer que l'ellipse touche les quatre côtés du quadrilatère il faut combiner (1) successivement avec (2), (3), (4), (5), et égaler le radical à zéro dans chacune des équations. La combinaison de (2) et de (3) donne tout de suite

$$D^2=4A \ldots\ldots (6), \quad E^2=4C \ldots\ldots (7).$$

En combinant ensuite (4) et (5) avec (1), on a deux équations, qui, après y avoir substitué $\frac{1}{4}D^2$ pour A et $\frac{1}{4}E^2$ pour C, sont divisibles par le facteur DE—2B, que l'on reconnaît être étranger à la question : elles deviennent alors

$$DE+4gD+4hE+2B+8gh=0 \ldots\ldots (8),$$

$$DE+4g'D+4h'E+2B+8g'h'=0 \ldots\ldots (9).$$

On assujettit la courbe à passer par le point donné, dont les coordonnées sont α et β, en posant l'équation

$$A\beta^2+B\alpha\beta+C\alpha^2+D\beta+E\alpha+1=0,$$

ou à cause de (6) et (7),

$$\beta^2D^2+4\alpha\beta B+\alpha^2E^2+4\beta D+4\alpha E+4=0 \ldots\ldots (10).$$

Les deux équations (8) et (9) étant retranchées l'une de l'autre, donnent, en faisant pour abréger $h-h'=n$; $g-g'=r$; $g'h'-gh=s$; $D=\frac{2s-nE}{r}$. Mettant cette valeur de D, ainsi que celle de B tirée de (8), dans l'équation (10), on a pour déterminer E la suivante,

$$(\beta n+\alpha r)^2E^2+4[-\beta^2ns-2\beta r(s+2gh'-2g'h)+\alpha r^2-\beta nr]E+4\beta^2s^2+16\alpha\beta ngg'r+4r^2+8\beta rs=0.$$

Ayant trouvé la valeur de E, on aura, en remontant, celles de D, B, A, C, et l'on pourra construire la courbe de l'équation (1). Le problème aura deux solutions. L'espèce de la courbe dépendra de la position du point donné à l'égard des quatre droites : s'il est placé sur une d'elles, la question se simplifie.

2.° En second lieu, qu'il s'agisse de trouver une section cônique qui touche cinq droites données de position, les équations qui serviront à déterminer les cinq coëfficiens de l'équation (1), seront (6), (7), (8), (9), auxquelles il faut ajouter une cinquième correspondante à la cinquième droite donnée : elle sera analogue à (8) et (9), et de cette forme,

$$DE+4g''D+4h''E+2B+8g''h''=0 \;\ldots\ldots\; (11).$$

Retranchant successivement (9) et (11) de (8), on a deux équations du premier degré entre D et E, desquelles on tire

$$D=2\frac{(h-h'')(g'h'-gh)-(h-h')(g''h''-gh)}{(h-h'')(g-g')-(h-h')(g-g'')}$$

$$E=2\frac{(g-g')(g''h''-gh)-(g-g'')(g'h'-gh)}{(h-h'')(g-g')-(h-h')(g-g'')}$$

Les équations (6), (7) et (8) donneront ensuite A, B, C.

Les expressions de A, B, C, D, E étant linéaires, on voit que le problème n'aura qu'une solution, et qu'il sera possible, si l'équation (1) n'a pas le caractère de l'absurdité.

3.° S'il s'agissait de faire passer une section cônique par cinq points, ayant joint l'un d'eux à deux autres, on prendrait ces deux droites pour axes des coordonnées, et l'on aurait quatre équations pour déterminer les quatre coëfficiens de l'équation (1), dont le terme constant serait nul. Ces quatre coëfficiens seraient linéaires.

PROBLÈME V.

Faire passer par trois points donnés l'ellipse la plus petite.

En prenant l'un des points donnés pour origine, appelant α et β ces distances aux deux autres, l'équation de l'ellipse demandée, les coordonnées étant parallèles aux deux côtés de l'angle ci-dessus, sera de cette forme,

$$Ay^2+xy+Cx^2+Dy+Ex=0 \ldots\ldots\ (1),$$

dans laquelle j'ai fait $=1$ le coëfficient de xy.

La condition que la courbe passe par les deux autres points, exige que, quand $x=0$, l'équation (1) donne $y=\beta$, et que quand $y=0$, on ait $x=\alpha$, il en résulte les relations suivantes,

$$\beta A+D=0 \ldots\ldots\ (2),\quad \alpha C+E=0 \ldots\ldots\ (3).$$

Pour que l'aire de l'ellipse soit un *maximum* ou un *minimum*, il faut que le produit des axes en soit un, et (V. le problème II) poser l'équation $d.\dfrac{DE-AE^2-CD^2}{(4AC-1)^{\frac{3}{2}}}=0 \ldots\ldots\ (4).$

Je mets dans (4) les valeurs de A et C tirées de (2) et (3), et l'ayant différenciée, j'égale séparément à zéro les multiplicateurs de dD, dE, il vient

$$-6(\alpha\beta+\alpha E+\beta D)DE+(4DE-\alpha\beta)(\alpha\beta+\alpha E+2\beta D)=0,$$

$$-6(\alpha\beta+\alpha E+\beta D)DE+(4DE-\alpha\beta)(\alpha\beta+\beta D+2\alpha E)=0;$$

Retranchant l'une de ces équations de l'autre, il vient

$$\beta D=\alpha E \ldots\ldots\ (5).$$

Combinant celle-ci avec l'une des précédentes, on a après les réductions, $(2E+\beta)(E+\beta)=0 \ldots\ldots\ (6)$.

Les deux facteurs de l'équation (6) appartiennent, le deuxième au *minimum*, et le premier est étranger : en les combinant succes-

sivement avec (2), (3), (5) pour déterminer la valeur des coëfficiens A, C, D, E, et substituant ensuite ces coëfficiens dans (1), on a

$$\alpha^2 y^2 + \alpha\beta xy + \beta^2 x^2 - \alpha^2\beta y - \alpha\beta^2 x = 0,$$

$$(\alpha y + \beta x)(\alpha y + \beta x - \alpha\beta) = 0,$$

qui étant construites donneront, savoir la première l'ellipse cherchée, et la deuxième deux droites parallèles, dont l'une passe par l'origine, et dont l'autre est le côté opposé du triangle donné.

Si dans les expressions des coordonnées du centre de l'ellipse qui sont (V. n.° 1) $\frac{BD-2AE}{4AC-B^2}$, et $\frac{BE-2CD}{4AC-B^2}$, on met les valeurs des coëfficiens $A=\frac{\alpha}{\beta}$, $B=1$, $C=\frac{\beta}{\alpha}$, $D=-\alpha$, $E=-\beta$, elles deviennent $\frac{\alpha}{3}$ et $\frac{\beta}{3}$; d'où résulte ce théorème : la plus petite ellipse qu'on puisse faire passer par les trois sommets d'un triangle, est celle dont le centre coïncide avec le centre de gravité du triangle, et l'aire de cette ellipse, quand le triangle est isocèle et rectangle, est à celle du cercle passant par les trois points, comme 4 est à $\sqrt{27}$.

PROBLÈME VI.

Faire passer par quatre points donnés l'ellipse la plus petite.

Soit α', β' les coordonnées d'un quatrième point ajouté aux trois points du problème précédent, les équations (1), (2), (3), (4) auront encore lieu ici, et l'on aura de plus, pour exprimer que l'ellipse passe par le quatrième point, la suivante,

$$A\beta'^2 + \alpha'\beta' + C\alpha'^2 + D\beta' + E\alpha' = 0 \ldots\ldots (5):$$

il faudra mettre dans (4) et (5) les valeurs de A et C, tirées de (2) et (3), puis mettre dans la transformée de (4) la valeur de D tirée

de la transformée de (5), différencier (4) et égaler à zéro sa différentielle : on trouvera d'abord

$$D=\frac{\alpha\alpha'\beta\beta'+\alpha'\beta(\alpha-\alpha')E}{\alpha\beta'(\beta'-\beta)},$$

qui, étant écrite ainsi pour abréger $D=p+qE$ et mise dans (4), conduira à la suivante,

$$q(2\alpha p-2\beta pq-4\alpha\beta q)E^3+(2\alpha p^2-4\beta p^2q-6\alpha\beta pq-3\alpha^2\beta q-3\alpha\beta^2q^2)E^2$$
$$+2\beta(-\alpha p^2-p^3-2\alpha\beta pq-\alpha^2p-\alpha^2\beta q)E-\alpha\beta^2p(\alpha+p)=0.$$

Une des racines de cette équation donnera pour E la valeur qui convient à la question : on aura ensuite facilement celles de D, A, C.

PROBLÈME VII.

Inscrire dans une ellipse le triangle de la plus grande aire.

1.° Supposons d'abord qu'étant donnés deux points M, M′ sur l'ellipse, on demande où doit être placé le troisième point M″, pour que le triangle formé par la liaison de ces trois points soit un *maximum* : il est évident, et une figure simple le rendra sensible, que la tangente passant par le point cherché M″ doit être parallèle à la corde MM′, car alors le triangle aura la plus grande hauteur possible entre tous ceux de même base : comme d'ailleurs tout diamètre partage en deux également toutes les cordes parallèles à la tangente élevée à l'extrémité de ce diamètre, il s'ensuit que le point M″ sera déterminé par le diamètre qui passe par le milieu de la corde MM′, dans le plus grand des deux arcs sous-tendus par la corde MM′.

2.° Ne supposons qu'un point donné M et deux variables M′M″. Il suit de ce qui précède que, quelle que soit la position de la corde cherchée M′M″, le diamètre passant par M passera aussi par le milieu

de cette corde. Soit $2a'$ ce diamètre connu, et $2b'$ son conjugué qui est parallèle à la corde cherchée M'M'' : soit x la partie du diamètre comprise entre le point M et la corde : la grandeur de cette demie corde sera $\frac{b'}{a'}\sqrt{2a'x-x^2}$. Enfin soit s le sinus de l'angle formé par les deux diamètres a' et b' ; l'aire du triangle MM'M'' sera $\frac{sb'}{a'}x\sqrt{2a'x-x^2}$: égalant sa différentielle à zéro, on a tout de suite $x=\frac{3a'}{2}$, c'est-à-dire que la corde cherchée coupe le diamètre a' aux trois quarts de sa longueur, à partir du point donné M.

3.° Que les trois points M, M', M'' soient variables : si dans l'expression de l'aire ci-dessus on met $\frac{3a'}{2}$ pour x, elle devient $\frac{3\sqrt{3}}{4}a'b's$ ou (en appelant a, b les demi-axes) $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$, c'est-à-dire que l'aire est constante et indépendante de la position du point M, et comme on peut regarder tour-à-tour chacun des trois points comme donnés, il en résulte que le diamètre passant par l'un quelconque des trois points, passe par le milieu de la corde opposée, d'où suit ce théorème :

» Si par le point situé aux trois quarts de la longueur d'un diamètre quelconque d'une ellipse on mène une corde parallèle au diamètre conjugué, et si on joint les extrémités de cette corde à l'extrémité la plus éloignée de ce diamètre ; 1.° tous les triangles formés de cette manière par trois cordes seront égaux et plus grands que tous ceux inscrits d'une autre façon ; 2.° l'aire de chacun d'eux est au rectangle des demi-axes comme $\sqrt{27}$ est à 4 ; 3.° le centre de gravité de tous ces triangles coïncide avec le centre de l'ellipse ».

PROBLÈME VIII.

Inscrire dans une ellipse le plus grand quadrilatère.

La solution de ce problème est une suite du précédent : en effet imaginons sur l'ellipse deux points donnés M, M', et deux autres variables M'', M''' situés de différens côtés de la corde MM'. Pour que le triangle $MM'M''$ soit le plus grand, il faut que M'' soit sur le diamètre qui passe par le milieu de la corde MM' : par la même raison il faut que M''' soit sur le même diamètre : donc M'' et M''' sont les extrémités d'un même diamètre : on prouvera de même que M et M' sont les extrémités d'un même diamètre. Il suit encore du problème précédent que ces deux diamètres doivent être respectivement parallèles à la tangente qui passe par l'extrémité de l'autre : donc ces diamètres sont conjugués : donc enfin le parallélogramme qui lie les quatre extrémités de deux diamètres conjugués quelconques, est le plus grand quadrilatère qu'on puisse inscrire. Tous ces parallélogrammes ont des aires égales à la moitié du rectangle des axes.

Nous avons supposé que les points inconnus M'', M''' devaient être de différens côtés de la corde donnée MM'. Si on les suppose du même côté, on prouvera que MM'' doivent être les extrémités d'un diamètre, et $M'M'''$ celles de son conjugué ; ce qui conduit aux mêmes conséquences. On démontrerait de la même manière que le plus petit quadrilatère qu'on puisse circonscrire, a ses côtés parallèles à deux diamètres conjugués quelconques.

PROBLÈME IX.

Circonscrire à une ellipse le triangle de la plus petite aire.

Soit $AA'A''$ le triangle cherché (une figure simple pourra faciliter l'intelligence de ce qui suit) : en prenant pour axes des coordonnées

les deux côtés AA', AA'', l'équation de l'ellipse inscrite au triangle sera de cette forme,

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+1=0 \ldots\ldots (1).$$

On aura (V. le problème IV), pour exprimer que l'ellipse touche les trois côtés du triangle, les équations

$$D^2=4A \ldots\ldots (2),\quad E^2=4C \ldots\ldots (3),$$

$$DE+4gD+4hE+2B+8gh=0 \ldots\ldots (4).$$

Dans ce calcul l'équation du côté $A'A''$ est $hy+gx=1$, et par conséquent on a les autres côtés $AA'=\frac{1}{h}$, $AA''=\frac{1}{g}$; mais g et h sont ici des coëfficiens indéterminés.

En appelant ε l'angle $A'AA''$ des coordonnées, l'aire du triangle cherché $AA'A''$ sera $\frac{\sin.\varepsilon}{2gh}$: la condition du *minimum* sera donc

$$d\left(\frac{\sin.\varepsilon}{gh}\right)=0 \ldots\ldots (5).$$

Je me propose d'abord ce problème partiel et préliminaire : étant donnée une ellipse touchée par les deux côtés d'un angle $A'AA''$, lui mener une troisième tangente $A'A''$, qui forme avec les deux premières le triangle $AA'A''$ de la plus petite aire.

Il n'y a de variables dans cette première question que g et h; différenciant donc (4) et (5), et éliminant dg et dh, on obtient la relation $gD=hE \ldots\ldots (6)$.

Or, en faisant alternativement $x=0$, $y=0$ dans (1), on reconnaît que les longueurs des deux tangentes qui partent du point donné A, sont exprimées par $\frac{-D}{2A}$ et $\frac{-E}{2C}$, ou, à cause de (2) et (3), par $\frac{-2}{D}$ et $\frac{-2}{E}$: il suit de-là et de la relation (6), que le côté cherché $A'A''$ doit être parallèle à la corde qui joint les deux points de contact des deux côtés donnés de l'angle indéfini $A'AA''$. Il en résulte

encore que le diamètre de l'ellipse qui passe par le point donné A, passe aussi par le milieu de la corde ci-dessus et par le milieu du côté cherché A′A″, ainsi que par le point de contact de ce côté avec l'ellipse.

Par ce premier résultat le problème principal est changé en celui-ci : étant donnée une ellipse, sur quel diamètre et en quel point de ce diamètre faut-il prendre un point A, pour que le triangle AA′A″, formé par deux tangentes menées de ce point A, et par une troisième menée à l'extrémité du diamètre passant par ce point A, soit le plus petit possible.

Soient a', b' deux demi-diamètres conjugués, dont le dernier b' est parallèle au côté A′A″ du triangle cherché : l'équation de l'ellipse rapportée à son centre sera $a'^2y'^2+b'^2x'^2=a'^2b'^2$. Soit de plus Θ l'angle formé par les deux diamètres conjugués a', b', dont le premier passe par le point A : on trouvera (en menant la corde dont nous avons parlé plus haut, et qui forme un triangle semblable au triangle cherché AA′A″) que $A'A''=2b'\frac{a'+x'}{\sqrt{a'^2-x'^2}}$, et que la droite qui joint le point A avec le milieu du côté A′A″, a pour expression $\frac{a'^2+a'x'}{x'}$; d'où il suit que l'aire du triangle AA′A″ est exprimée par $\frac{a'b'\sin.\Theta.(a'+x')^2}{x'\sqrt{a'^2-x'^2}}$, quantité dont la variation est indépendante de celle de b', parce que $a'b'\sin.\Theta$ est une quantité constante et égale au rectangle des demi-axes de l'ellipse.

Si dans cette expression de l'aire on fait $x'=na'$ (n étant un rapport inconnu), elle devient, en appelant a, b les demi-axes de l'ellipse, $\frac{ab(1+n)^2}{n\sqrt{1-n^2}}$, quantité dont la variation ne dépend que de n, et nullement de la position des diamètres a', b'. Il en résulte déjà ce théorème :

» Une ellipse étant donnée, si sur le prolongement de plusieurs

diamètres on prend des points A à des distances proportionnelles à la grandeur de chaque diamètre (en sorte que ces points soient sur une ellipse semblable et concentrique à la première), et si on mène par chaque point A deux tangentes, ainsi qu'une troisième à l'extrémité du diamètre passant par A, tous les triangles circonscrits de cette manière auront la même aire ».

Il ne reste plus qu'à trouver la position du point A sur un diamètre quelconque, pour que le triangle circonscrit soit un *minimum*. Or, en égalant à zéro la différentielle de $\frac{ab(1+n)^2}{n\sqrt{1-n^2}}$, on trouve $n=\frac{1}{2}$: ou bien, si on différentie $\frac{a'b'\sin.\Theta.(a'+x')^2}{x'\sqrt{a'^2-x'^2}}$, en faisant varier a' et x' ensemble ou séparément, on trouve le facteur unique $2x'-a'=0$, c'est-à-dire le même résultat. De-là on conclut que la distance du point A au centre de l'ellipse est $2a'$, conséquence qui fournit le théorème suivant nouveau et remarquable.

» Une ellipse étant donnée, si on en décrit une seconde semblable concentrique et de dimensions doubles, et si par différens points de la seconde on mène deux tangentes à la première, ainsi qu'une troisième à l'extrémité du diamètre passant par le point d'où partent les deux premières, 1.° tous les triangles formés de cette manière auront la même aire ; 2.° cette aire sera plus petite que celle de tout autre triangle circonscrit et formé différemment ; 3.° tous ces triangles auront leurs trois sommets sur la grande ellipse ; 4.° les centres de gravité de tous ces triangles circonscrits coïncideront avec le centre de l'ellipse, et les trois côtés de ces triangles seront touchés dans leurs milieux par l'ellipse intérieure ; 5.° l'aire de l'un quelconque de ces triangles est au rectangle des axes de l'ellipse comme $\sqrt{27}$ est à 4.

THÉORÈME X.

Si par quatre points quelconques d'une ellipse on fait passer deux quadrilatères, l'un circonscrit, l'autre inscrit, les quatre diagonales des deux quadrilatères se couperont au même point.

J'ai fait annoncer ce théorème dans les *Annales de Mathématiques* (2.ᵉ volume, page 384). Il en a paru plusieurs démonstrations (3.ᵉ volume, page 161) : on peut le démontrer par l'analyse, en rapportant l'équation de l'ellipse à deux côtés du quadrilatère circonscrit, et égalant les coordonnées des intersections des diagonales des deux quadrilatères ; la démonstration suivante tirée de la synthèse est plus courte.

Imaginons un tableau et un oeil tellement placé, que la perspective du quadrilatère circonscrit soit un parallélogramme : alors le quadrilatère inscrit sera aussi un parallélogramme dont les deux diagonales passeront, ainsi que celles du parallélogramme circonscrit, par le centre de la nouvelle ellipse du tableau : donc les quatre diagonales qui se coupent maintenant au même point, se coupaient aussi en un même point avant d'être vues en perspective.

Remarque. J'ai eu occasion de parler plusieurs fois dans cet ouvrage des propriétés des centres de gravité : qu'on me permette de rappeler ici un théorème sur la position du centre de gravité du quadrilatère, que j'ai fait annoncer dans les *Annales de Mathématiques* (tom. 3, pag. 76 et 192).

Qu'on imagine un quadrilatère dont les deux diagonales sont AC, BD, et O leur intersection : soient H et H′ les milieux des deux diagonales, et K, K′ deux points pris sur ces droites, en sorte qu'on ait CK=AO, DK′=BO.

Je dis que le centre de gravité du quadrilatère sera à l'intersection des droites HK′ et H′K.

En effet, on sait que le poids de l'aire du triangle ABD peut être remplacé par trois poids égaux P placés aux angles A, B, D; de même, le poids de l'aire du triangle BCD peut être remplacé par trois poids égaux Q, placés en B, C, D: ces poids P, Q doivent être proportionnels aux aires des triangles ABD, BCD : ainsi l'on a P : Q :: AO : CO.

Le poids P placé en A, et le poids Q placé en C peuvent être remplacés par un poids unique P+Q placé en K : nous avons en B et D deux poids égaux P + Q, qui peuvent être remplacés par un seul poids 2P+2Q placé en H′, milieu de BD. Donc le centre de gravité du système de tous les poids est aux deux tiers de la droite H′K : on prouverait de même qu'il est sur la droite HK′.

On sent que la construction fort simple qui résulte de ce théorème, peut être étendue à la détermination du centre de gravité des corps.

PROBLÈME XI.

Relations entre les cinq droites d'un quadrilatère, entre la base, la hauteur, le volume, et les angles au sommet d'un tétraèdre.

Soient a, a', a'' les trois droites qui partent d'un angle du quadrilatère (a' étant une diagonale), angle $(a,a')=\varepsilon$, angle $(a',a'')=\varepsilon'$, angle $(a, a'')=\varepsilon''$, $b=$ côté opposé à ε; $b'=$ côté opposé à ε'; $b''=$ diagonale opposée à ε''.

On aura trois triangles, qui fourniront ces équations,

$$b^2=a^2+a'^2-2aa'.\cos.\varepsilon \ldots\ldots\ldots (1),$$

$$b'^2=a''^2+a'^2-2a'a''.\cos.\varepsilon' \ldots\ldots (2),$$

$$b''^2=a^2+a''^2-2aa''.\cos.\varepsilon'' \ldots\ldots (3),$$

$$\varepsilon''=\varepsilon+\varepsilon' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Je mets dans (3) pour cos. ε'' sa valeur tirée de (4), puis pour cos. ε et cos. ε' leurs valeurs tirées de (1) et (2) : je quarre la transformée qui en résulte, et j'y mets de nouveau pour sin.$^2 \varepsilon$, sin.$^2 \varepsilon'$ leurs valeurs déduites de (1) et (2), j'ai, après la réduction, la suivante :

$$a^4b'^2+a''^2b^4+a^2b'^4+a''^4b^2+a'^4b''^2+a'^2b''^4-a^2b^2b'^2-a^2a''^2b^2+a^2a'^2b^2$$
$$-a^2a''^2b'^2-a^2a'^2b'^2-a^2o'^2b''^2+a^2a''^2b''^2-a^2a'^2b''^2-a''^2b^2b'^2+b^2b'^2b''^2$$
$$-a'^2a''^2b^2-a''^2b^2b''^2-a'^2b^2b''^2+a'^2a''^2b'^2-a'^2b'^2b''^2-a'^2a''^2b''^2=0\,.\,.\,(5).$$

La symétrie de cette équation permet de prendre indifféremment l'une des six lettres pour inconnue, et elle a deux racines différentes, parce qu'en effet, cinq lignes étant données, on peut en trouver deux dont chacune forme avec les cinq premières un quadrilatère différent, à moins que la position et la grandeur de ces cinq droites ne rendent le problème impossible.

Si par le sommet d'un tétraèdre on abaisse une perpendiculaire sur la face opposée, et si par le pied de cette perpendiculaire on mène trois droites a, a', a'' aux angles de la base, ces trois droites et les trois côtés b, b', b'' de la base auront entr'eux la relation de l'équation (5) : de plus on aura entre la hauteur h et les trois arêtes partant du sommet que j'appelle r, r', r'', les équations,

$$a^2=r^2-h^2\,;\quad a'^2=r'^2-h^2\,;\quad a''^2=r''^2-h^2\,:$$

je mets ces valeurs de a^2, a'^2, a''^2 dans l'équation (5), et il vient la suivante :

$$h^2(-b^4-b'^4-b''^4+2b^2b'^2+2b^2b''^2+2b'^2b''^2)-4r^2r'^2r''^2+r''^2(r^2+r'^2-b^2)^2$$
$$+r^2(r'^2+r''^2-b'^2)^2+r'^2(r^2+r''^2-b''^2)^2-(r^2+r'^2-b^2)(r'^2+r''^2-b'^2)$$
$$(r^2+r''^2-b''^2)=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(6),$$

dont les termes non affectés de h^2 sont les mêmes que ceux de l'équation (5) : celle-ci donne la relation entre la hauteur h et les six arêtes du tétraèdre.

En appelant B l'aire de la base du tétraèdre, on sait qu'on a

$$16B^2 = -b^4 - b'^4 - b''^4 + 2b^2b'^2 + 2b^2b''^2 + 2b'^2b''^2,$$

et en représentant par S les autres termes qui ne multiplient pas h^2 dans (6), on pourra l'écrire ainsi,

$$16B^2h^2 + S = 0 \ldots\ldots\ldots (6').$$

Donc en appelant V le volume du tétraèdre qui vaut $\frac{Bh}{3}$, on aura la relation $144V^2 + S = 0 \ldots\ldots\ldots (7)$.

Si ε, ε', ε'' sont les angles formés par les trois arètes r, r', r'', on aura $b^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos.\varepsilon$; $b'^2 = r'^2 + r''^2 - 2r'r'' \cos.\varepsilon'$; $b''^2 = r^2 + r''^2 - 2rr'' \cos.\varepsilon''$; et en mettant ces valeurs de b^2, b'^2, b''^2 dans (7), il viendra

$$V = \frac{rr'r''}{6}\sqrt{(1 - \cos.^2\varepsilon - \cos.^2\varepsilon' - \cos.^2\varepsilon'' + 2\cos.\varepsilon\cos.\varepsilon'\cos.\varepsilon'')} \cdots (8),$$

formule très-utile dans beaucoup de cas.

Enfin, en mettant pour b^2, b'^2, b''^2 leurs valeurs dans celle de B^2, on a l'expression suivante de la base en fonction des trois arètes et des trois angles partant du sommet :

$$4B^2 = r^2r'^2\sin.^2\varepsilon + r^2r''^2\sin.^2\varepsilon'' + r'^2r''^2\sin.^2\varepsilon' + 2rr'r''$$
$$[r(\cos.\varepsilon\cos.\varepsilon'' - \cos.\varepsilon') + r'(\cos.\varepsilon\cos.\varepsilon' - \cos.\varepsilon'') + r''(\cos.\varepsilon'\cos.\varepsilon'' - \cos.\varepsilon)].$$

PROBLÈME XII.

Inscrire dans un tétraèdre le plus grand ellipsoïde.

J'ai dit ailleurs qu'on facilitait souvent la solution des problèmes en choisissant des coordonnées obliques et parallèles à certaines lignes données de position. Le problème dont il s'agit ici, m'a paru propre à confirmer cette remarque ; car je doute qu'on pût parvenir à la solution, en employant des coordonnées rectangulaires, et en ne faisant pas usage des formules que j'ai trouvé sur les surfaces courbes du second degré.

L'ellipsoïde que nous cherchons, doit remplir cinq conditions, savoir de toucher les quatre faces du tétraèdre, et d'être le plus grand de tous ceux qui satisfont à ces quatre conditions.

Soient α, β, γ les coordonnées inconnues du centre de l'ellipsoïde, coordonnées que je suppose parallèles aux trois arètes a, b, c d'un angle trièdre. L'équation de l'ellipsoïde rapportée à son centre et à des axes parallèles aux trois arètes a, b, c, sera de cette forme,

$$Az^2+A'y^2+A''x^2+Bzy+B'zx+B''xy+1=0 \ldots\ldots (1).$$

En faisant alternativement dans cette équation $x=-\alpha$, $y=-\beta$, $z=-\gamma$, on a les intersections de la surface par les trois faces de l'angle trièdre ci-dessus : elles sont

$$Az^2+A'y^2+Bzy-B'\alpha z-B''\alpha y+A''\alpha^2+1=0 \ldots\ldots (2),$$
$$Az^2+A''x^2+B'zx-B\beta z-B''\beta x+A'\beta^2+1=0 \ldots\ldots (3),$$
$$A'y^2+A''x^2+B''xy-B\gamma y-B'\gamma x+A\gamma^2+1=0 \ldots\ldots (4).$$

On exprime que l'ellipsoïde touche les trois faces de l'angle trièdre, en écrivant que les ellipses représentées par (2), (3), (4) se réduisent chacune à un point unique : or j'ai donné (V. le n.° 3 sect. I.re) la relation qui doit exister entre les coëfficiens d'une équation du deuxième degré à deux variables, pour qu'elle exprime un point unique : en appliquant cette formule aux équations (2), (3), (4), il en résulte les suivantes :

$$\alpha^2(BB'-2AB'')^2=(B^2-4AA')(B'^2\alpha^2-4AA''\alpha^2-4A) \ldots\ldots (5),$$
$$\beta^2(B'B''-2A''B)^2=(B'^2-4AA'')(B''^2\beta^2-4A'A'\beta^2-4A'') \ldots (6),$$
$$\gamma^2(BB''-2A'B')^2=(B''^2-4A'A'')(B^2\gamma^2-4AA'\gamma^2-4A') \ldots\ldots (7).$$

En faisant pour abréger $D=AB''^2+A'B'^2+A''B^2-BB'B''-4AA'A''$, je mets (5), (6), (7) sous la forme qui suit :

$$D\alpha^2+B^2-4AA'=0 \ldots\ldots (5'), \quad D\beta^2+B'^2-4AA''=0 \ldots\ldots (6'),$$
$$D\gamma^2+B''^2-4A'A''=0 \ldots\ldots (7').$$

Il faut à présent exprimer que l'ellipsoïde touche la face opposée à l'angle trièdre ci-dessus, face que j'appelerai la base du tétraèdre. L'équation de cette base, l'origine étant prise au sommet de l'angle trièdre, est $abz'+acy'+bcx'=abc$, que j'écris ainsi :

$$kz'+hy'+gx'+1=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (8),$$

en faisant $k=\frac{-1}{c}$, $h=\frac{-1}{b}$, $g=\frac{-1}{a}$. L'équation de cette base, l'origine étant prise au centre de l'ellipsoïde, sera

$$k(z+\gamma)+h(y+\beta)+g(x+\alpha)+1=0,$$

ou (en faisant $L=1+k\gamma+h\beta+g\alpha$),

$$kz+hy+gx+L=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (9).$$

En mettant dans (1) la valeur de z tirée de (9), on a pour la projection sur le plan des x, y de l'intersection de la surface par la base du tétraèdre :

$$(Ah^2+A'k^2-Bhk)y^2+(2Agh-Bgk-B'hk+B''k^2)xy+(Ag^2+A''k^2-B'gk)x^2$$
$$+(2AhL-BkL)y+(2AgL-B'kL)x+(AL^2+Gk^2)=0,$$

que j'écris ainsi par abréviation, $a'y^2+b'xy+c'x^2+d'y+e'x+f'=0$. D'après ce qui a été dit plus haut, on exprime que l'ellipse de cette dernière équation se réduit à un point unique, en écrivant

$$(b'd'-2a'e')^2=(b'^2-4a'c')(d'^2-4a'f') \quad \text{ou}$$
$$a'e'^2+c'd'^2-b'd'e'+f'(b'^2-4a'c')=0.$$

Ayant développé cette équation, après avoir remis pour $a'b'c'd'e'f'$, L, leurs valeurs, on trouve que les 91 termes dont elle est composée, se réduisent à 17, et elle devient

$$D(1+g\alpha+h\beta+k\gamma)^2+g^2(B^2-4AA')+h^2(B'^2-4AA'')+k^2(B''^2-4A'A'')$$
$$-2gh(BB'-2AB'')-2gk(BB''-2A'B')-2hk(B'B''-2A''B)=0 \;.\;.\;. (10).$$

Cette équation se simplifie par le moyen de (5'), (6'), (7'), et elle devient

$$D(1+2k\gamma+2h\beta+2g\alpha+2hk\beta\gamma+2gk\alpha\gamma+2gh\alpha\beta)-2gh(BB'-2AB'')$$
$$-2gk(BB''-2A'B')-2hk(B'B''-2A''B)=0 \ldots\ldots (10').$$

Après avoir trouvé les relations (5′), (6′), (7′), (10′), qui assujettissent la surface de l'équation (1) à toucher les quatre faces du tétraèdre, il reste à exprimer la condition que l'ellipsoïde soit un *maximum*. Cette condition sera remplie, si le produit de ces trois axes est le plus grand possible. J'ai trouvé le premier (équation (8) n.° 10), l'équation dont les trois racines sont les quarrés des trois demi-axes de l'ellipsoïde représenté par l'équation (1) pour le cas général des coordonnées obliques : le terme constant de cette équation étant le produit des racines, il est aisé de voir que la condition du *maximum* sera exprimée par $dD=0$, c'est-à-dire

$$d.(AB''^2+A'B'^2+A''B^2-BB'B''-4AA'A'')=0 \ldots\ldots (11)$$

Les équations du problème sont trouvées : elles sont au nombre de cinq, savoir (5′), (6′), (7′), (10′), (11), et il y a neuf variables, A, A′, A″; B, B′, B″; α, β, γ : il faut donc trouver encore cinq relations entre ces variables : il existe plusieurs manières de procéder à cette recherche ; on peut, au moyen des équations (5′), (6′), (7′) (10′) éliminer quatre des neuf variables : la fonction D n'en renfermant plus alors que cinq, si on la différencie, et qu'on égale séparément à zéro les multiplicateurs de chacune des cinq différentielles, on aura les cinq équations qu'il reste à trouver ; mais ce procédé, quoique bon en théorie, entraînerait ici dans des calculs impraticables ; il est plus simple de ne faire varier les inconnues que successivement : il y a même un choix à faire dans l'application de ce principe : c'est pourquoi je vais exposer la marche que j'ai reconnu être la plus directe.

Je suppose d'abord α, β, γ constans : cela revient à résoudre la question où l'on demanderait d'inscrire le plus grand ellipsoïde parmi tous ceux qui auraient le même centre.

Je substitue dans (11), après l'avoir différenciée, les valeurs de dB, dB', dB'' tirées de (5'), (6'), (7'), et j'ai la suivante,

$$B''(BB''-2A'B')(B'B''-2A''B)dA+B'(BB'-2AB'')(B'B''-2A''B)dA'$$
$$+B(BB'-2AB'')(BB''-2A'B')dA''=0 \;\ldots\ldots\; (12).$$

Maintenant au lieu de substituer dans (10') les valeurs de dB, dB', dB'', ce qui jeterait dans des calculs embarrassans, je remarque que l'expression de D peut être mise sous ces trois formes,

$$(BB'-2AB'')^2-(B^2-4AA')(B'^2-4AA'')=4AD,$$
$$(B'B''-2A''B)^2-(B'^2-4AA'')(B''^2-4A'A'')=4A''D,$$
$$(BB''-2A'B')^2-(B''^2-4A'A'')(B^2-4AA')=4A'D.$$

Je différencie ces trois équations, en observant qu'à cause de D, α, β, γ constans, les quantités B^2-4AA'; B'^2-4AA''; $B''^2-4A'A''$ sont aussi constantes en vertu de (5'), (6'), (7'), et il vient

$$d(BB'-2AB'')=\frac{2DdA}{BB'-2AB''}$$
$$d(BB''-2A'B')=\frac{2DdA'}{BB''-2A'B'}$$
$$d(B'B''-2A''B)=\frac{2DdA''}{B'B''-2A''B}$$

En vertu de ces trois dernières équations la différentielle de (10') devient

$$gh(BB''-2A'B')(B'B''-2A''B)dA+gk(BB'-2AB'')(B'B''-2A''B)dA'$$
$$+hk(BB'-2AB'')(BB''-2A'B')dA''=0 \;\ldots\ldots\; (13).$$

J'élimine dA entre (12) et (13), et ayant égalé à zéro les multiplicateurs de dA' et de dA'' dans celle qui en provient, on a les suivantes,

$$(BB'-2AB'')(B'B''-2A''B)(B''k-B'h)=0;$$
$$(BB'-2AB'')(BB''-2A'B')(B''k-Bg)=0.$$

Les deux premiers facteurs de ces équations appartiennent au cas où l'ellipsoïde devrait être un *minimum* : les deux autres résolvent la question du *maximum*, et donnent $B''k - B'h = 0$, et $B''k - Bg = 0$, ou

$$B'' = B\frac{g}{k} \ldots\ldots (14) \quad \text{et} \quad B' = B\frac{g}{h} \ldots\ldots (15).$$

Ce sont là deux des cinq relations que doit fournir la condition du *maximum* : il en faut encore trouver trois autres.

En vertu de (14) et (15), les équations (5′), (6′), (7′), (10′), (11) deviennent

$$D\alpha^2 + B^2 - 4AA' = 0 \ldots\ldots (16);$$

$$Dh^2\beta^2 + B^2g^2 - 4AA''h^2 = 0 \ldots\ldots (17);$$

$$Dk^2\gamma^2 + B^2g^2 - 4A'A''k^2 = 0 \ldots\ldots (18);$$

$$Dhk(1 + 2k\gamma + 2h\beta + 2g\alpha + 2hk\beta\gamma + 2gk\alpha\gamma + 2gh\alpha\beta) - 6B^2g^2hk$$
$$+ 4B(Ag^2h^2 + A'g^2k^2 + A''h^2k^2) = 0 \ldots\ldots (19);$$

$$dD = d\left(\frac{B^2}{h^2k^2}(Ag^2h^2 + A'g^2k^2 + A''h^2k^2) - \frac{B^3g^2}{hk} - 4AA'A''\right) = 0 \ldots (20).$$

Comme il reste encore sept variables, A, A', A'', B, α, β, γ, dans ces cinq équations, je fais B et A constans. Je tire de (16) et (17) $dA' = \frac{D\alpha d\alpha}{2A}$, $dA'' = \frac{D\beta d\beta}{2A}$: je mets dans (20), après l'avoir différenciée par rapport à A' et A'', les valeurs précédentes de dA' et dA'' : elle devient après les réductions

$$\alpha d\alpha(B^2g^2 - 4AA''h^2) + h^2\beta d\beta(B^2 - 4AA') = 0,$$

ou à cause de (16) et (17)

$$\beta d\alpha + \alpha d\beta = 0 \ldots\ldots (21).$$

Après avoir différencié (19), en observant que le terme $2gh\alpha\beta$ est constant, j'y mets pour dA', dA'' les valeurs ci-dessus, et pour $d\gamma$ celle qui résulte de la combinaison de (16), (17), (18), savoir $d\gamma = \frac{A'\beta d\beta + A''\alpha d\alpha}{A\gamma}$, il vient, après les réductions, et après

avoir substitué pour $d\beta$ sa valeur donnée par (21), l'équation finie qui suit :

$$Ah\gamma(1+k\gamma)(h\beta-g\alpha)+hk(1+g\alpha+h\beta)(A'\beta^2+A''\alpha^2)+Bk\gamma(h^2\beta^2-g^2\alpha^2)=0$$

Je mets dans celle-ci pour A' et A'' les valeurs tirées de (16) et (17), et il vient

$$4A^2h^2\gamma(1+k\gamma)(h\beta-g\alpha)+B^2k(1+g\alpha+h\beta)(h^2\beta^2-g^2\alpha^2)$$
$$+4ABhk\gamma(h^2\beta^2-g^2\alpha^2)=0.$$

Cette dernière équation est composée de deux facteurs, l'un étranger à la question, l'autre,

$$h\beta-g\alpha=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (22),$$

qui la résout.

La symétrie des équations (16), (17), (18), (19) fait voir qu'en faisant constant A' au lieu de A, on aurait trouvé la relation

$$k\gamma-g\alpha=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (23).$$

Il reste encore à trouver une équation. Pour cela, au moyen de (22) et (23), j'élimine A', A'', β, γ des équations (16), (17), (18), (19), (20), en remarquant qu'on a $A'=A\frac{h^2}{k^2}$, et $A''=A\frac{g^2}{k^2}$; il vient les suivantes,

$$Dk^2\alpha^2+B^2k^2-4A^2h^2=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (24),$$

$$Dk(1+6g\alpha+6g^2\alpha^2)-6B^2g^2k+12ABg^2h=0 \;.\;.\;.\;.\; (25),$$

$$dD=d.\frac{g^2}{hk^4}(3AB^2hk^2-B^3k^3-4A^3h^3)=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (26).$$

Après avoir différencié ces trois équations, en faisant varier à-la-fois A, B, α, et en faisant attention que la dernière est divisible par $Bk-2Ah$, j'élimine les trois différentielles dA, dB, $d\alpha$, ce qui ne présente aucune difficulté, et il vient

$$Bk(1+2g\alpha)+2Agh\alpha=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (27).$$

Pour obtenir une relation plus simple que (27), j'élimine D entre (24) et (25), et il vient une équation qui, étant combinée avec (27), en fournit une en α, laquelle est

$$36g^3\alpha^3+33g^2\alpha^2+10g\alpha+1=0, \text{ ou } (3g\alpha+1)^2(4g\alpha+1)=0.$$

Une légère discussion prouve que le facteur $4g\alpha+1=0 \ldots.(28)$ fournit l'ellipsoïde cherché.

Nous avons trouvé les cinq relations dont nous avons besoin, et le problème est résolu : il ne s'agit plus que de remonter aux équations trouvées pour en déduire la valeur des coëfficiens ; ce que je fais ainsi qu'il suit.

En combinant (27) et (28), on en tire $Bk=Ah$. Mettant dans (24) et (25) cette valeur de B, ainsi que celles de D et α, on trouve $A=-24k^2$; d'où en remontant $A'=-24h^2$, $A''=-24g^2$; $B=-24hk$, $B'=-24gk$, $B''=-24gh$; $\alpha=\frac{-1}{4g}$, $\beta=\frac{-1}{4h}$, $\gamma=\frac{-1}{4k}$. Et ainsi $\alpha=\frac{a}{4}$, $\beta=\frac{b}{4}$, $\gamma=\frac{c}{4}$.

Si on substitue ces valeurs des coëfficiens dans (1), en se rappelant que $g=\frac{-1}{a}$, $h=\frac{-1}{b}$, $k=\frac{-1}{c}$, on aura pour l'équation de l'ellipsoïde rapportée à son centre,

$$a^2b^2z^2+a^2c^2y^2+b^2c^2x^2+a^2bczy+ab^2czx+abc^2xy=\tfrac{1}{24}a^2b^2c^2 \ldots.(29).$$

En construisant cette équation par les formules que j'ai donné dans le commencement de cet ouvrage, on aura la grandeur et la direction des trois axes principaux de l'ellipsoïde demandé.

Il résulte des valeurs de α, β, γ, que le centre de l'ellipsoïde coïncide avec le centre de gravité du tétraèdre : on aurait pu tirer cette conséquence des équations (22) et (23), sans faire d'autres calculs : en effet ces équations sont celles d'une droite passant par l'angle trièdre et par le centre de gravité du tétraèdre, et cette droite est l'intersection de deux plans passant chacun par l'une des arètes de cet angle et par le milieu de l'arète opposée.

Il résulte encore des résultats trouvés un autre théorème remarquable : c'est que l'ellipsoïde touche chacune des quatre faces du tétraèdre dans le centre de gravité de cette face : en effet l'équation de la surface, l'origine étant prise au sommet de l'angle trièdre, est

$$A(z'-\gamma)^2+A'(y'-\beta)^2+A''(x'-\alpha)^2+B(z'-\gamma)(y'-\beta)+B'(z'-\gamma)(x'-\alpha)$$
$$+B''(y'-\beta)(x'-\alpha)+1=0.$$

En y faisant successivement $z'=0$, $y'=0$, $x'=0$, on aura les traces qui sont ici, des ellipses réduites à un point unique qui en est le centre : il sera aisé d'avoir les coordonnées de ces trois points en fonction de a, b, c, et de prouver qu'elles sont les mêmes que pour les centres de gravité des faces de l'angle trièdre : on prouvera la même chose pour la base du tétraèdre.

Ainsi le plus grand ellipsoïde inscrit dans un tétraèdre jouit de la même propriété que la plus grande ellipse inscrite dans un triangle.

PROBLÈME XIII.

Circonscrire à un ellipsoïde le tétraèdre du plus petit volume.

Ce problème est l'inverse du problème précédent et l'analogue du problème IX. En suivant la même marche que dans ce dernier, on voit qu'il faut déjà résoudre ce problème partiel : étant donné un ellipsoïde touché par les trois faces d'un angle trièdre donné, trouver la position d'un quatrième plan tangent qui, en circonscrivant l'ellipsoïde, forme avec les trois premiers le plus petit tétraèdre.

En retournant au problème XII, on voit que l'équation $(10')$ est celle qui exprime que le plan cherché est tangent. En appelant ε, ε', ε'' les angles formés par les trois arêtes de l'angle trièdre donné, lesquelles sont inconnues, et sont exprimées ici par $\frac{-1}{g}$, $\frac{-1}{h}$, $\frac{-1}{k}$, on aura (V. le problème XI) pour l'expression du

volume du tétraédre ;

$$\frac{-1}{6ghk}\sqrt{(1-\cos.^2\varepsilon-\cos.^2\varepsilon'-\cos.^2\varepsilon''+2\cos.\varepsilon\cos.\varepsilon'\cos.\varepsilon'')}\,.$$

Comme il n'y a de variables dans le problème que g, h, k, la condition du *minimum* donnera $d.ghk=0$ . . . . . . (1).

Je différencie donc (10') du problème XII, et ayant éliminé dg par le moyen de la précédente (1), j'égale à zéro les multiplicateurs de dh et dk, il vient les suivantes :

$$D(g\alpha-k\gamma)(1+h\beta)-(BB'-2AB'')gh+(B'B''-2A''B)hk=0\ldots(2),$$

$$D(h\beta-k\gamma)(1+g\alpha)-(BB'-2AB'')gh+(BB''-2A'B')gk=0\ldots(3).$$

Ces deux équations combinées avec (10') donneraient les valeurs de g, h, k par une équation du 2.e degré et fourniraient deux plans tangens, l'un qui renferme l'ellipsoïde dans le tétraèdre cherché, l'autre qui le laisse en déhors du tétraèdre.

Il faut actuellement faire voir que les relations $g\alpha=k\gamma$ et $h\beta=k\gamma$ qui se déduisent de (2), (3), (10'), déterminent le parallélisme du plan trouvé avec celui qui passe par les trois points de contact donnés de l'ellipsoïde et des trois faces de l'angle trièdre. Ces trois points de contact sont les centres des ellipses des équations (2), (3), (4) du problème XII : on trouve que les coordonnées de ces trois points par rapport au centre de l'ellipsoïde sont pour le premier $x=-\alpha$, $y=\frac{BB'-2AB''}{B^2-4AA'}\alpha$, $z=\frac{B''-2A'B'}{B^2-4AA'}\alpha$; pour le 2.^{e} $y=-\beta$, $x=\frac{BB'-2AB''}{B'^2-4AA''}\beta$, $z=\frac{B'B''-2A''B}{B'^2-4AA''}\beta$; pour le 3.^{e} $z=-\gamma$, $y=\frac{B'B''-2A''B}{B''^2-4A'A''}\gamma$, $x=\frac{BB''-2A'B'}{B''^2-4A'A'}\gamma$.

Si on prend la peine de chercher le plan qui passe par ces trois points, et si on le combine avec les relations $g\alpha=k\gamma$, $h\beta=k\gamma$, en ayant égard à (2), (3), (10'), on trouvera qu'il est de cette forme, $kz+hy+gx=$ etc., c'est-à-dire qu'il est parallèle à la base trouvée du tétraèdre.

Ce premier résultat obtenu, on pourra, en faisant des raisonnemens analogues à ceux du problème IX, et sans avoir recours à l'analyse, qui serait ici très-compliquée, achever la solution.

En effet, puisque la base du tétraèdre doit être parallèle au plan passant par les trois autres points de contact, on pourra en dire autant des trois autres faces, en les considérant alternativement comme base du tétraèdre : il suit de-là que les quatre droites qui joignent un angle avec le point de contact opposé, sont quatre diamètres de l'ellipsoïde se coupant au centre : il en résulte encore, ainsi que des résultats obtenus dans le problème XII, que le centre de l'ellipsoïde est aussi le centre de gravité du tétraèdre, et que les quatre points de contact des faces sont aussi les centres de gravité de ces faces.

r, r', r'' étant les trois demi-axes de l'ellipsoïde, il résulte de l'équation (8) du n.° 10, que le parallélipipède rectangle construit sur ces demi-axes est

$$\frac{2}{\sqrt{D}}\sqrt{(1-\cos.^2\varepsilon-\cos.^2\varepsilon'-\cos.^2\varepsilon''+2\cos.\varepsilon\cos.\varepsilon'\cos.\varepsilon'')}.$$

On trouve par le problème XII, que a, b, c étant les arètes de l'angle trièdre $D=\frac{2.24^3}{a^2b^2c^2}$, d'où il est aisé de conclure que le volume du tétraèdre est à celui du parallélipipède rectangle circonscrit, comme $\sqrt{27}$ est à 3 (V. le problème XI).

De tous ces résultats on conclut ce théorème :

» 1.° Étant donné deux ellipsoïdes semblables, concentriques, ou dont les axes coïncident, si l'on circonscrit au plus petit ellipsoïde tant de tétraèdres qu'on voudra, ayant tous un angle sur la surface du plus grand, et de manière que les quatre droites qui joignent le centre aux quatre angles du tétraèdre, passent aussi par les quatre points de contact, tous ces tétraèdres auront le même volume ; 2.° si de plus les axes du grand ellipsoïde sont triples de ceux homologues

dans le petit, tous les tétraèdres seront plus petits en volume que tous ceux qu'on pourrait circonscrire d'une autre façon, ils auront leurs quatre sommets sur la surface du grand ellipsoïde, leur centre de gravité coïncidera avec le centre de l'ellipsoïde, les centres de gravité des quatre faces coïncideront avec les quatre points de contact; enfin le volume de l'un quelconque des tétraèdres sera à celui du parallélipipède rectangle circonscrit au petit ellipsoïde comme $\sqrt{27}$ est à 3.

PROBLÈME XIV.

Inscrire dans un ellipsoïde le plus grand tétraèdre.

Concevons un triangle $MM'M''$ formé par trois des sommets du tétraèdre cherché, je dis que le quatrième sommet M''' devra être situé de manière que le plan tangent qui passe par ce point, soit parallèle à la base $MM'M''$; car alors ce tétraèdre ayant la plus grande hauteur parmi tous ceux de même base, sera le plus grand de tous. Comme on peut prendre tour-à-tour chacun des trois autres points comme sommets, on doit en conclure que le tétraèdre cherché est tel que le plan tangent passant par un quelconque des quatre points $MM'M''M'''$ se trouve parallèle au plan passant par les trois autres points.

Il suit de cette première propriété que, si par l'un quelconque M''' des points $MM'M''M'''$ on conçoit un diamètre de l'ellipsoïde, le plan passant par les trois autres points $MM'M''$ sera parallèle aux plans diamètres conjugués à ce premier diamètre; mais le plus grand triangle $MM'M''$ qu'on puisse inscrire dans la section elliptique, est celui qui a son centre de gravité confondu avec le centre de cette ellipse; donc les quatre diamètres passant par les quatre points $MM'M''M'''$ passent respectivement par le centre de gravité

de la face opposée du tétraèdre : donc aussi le centre de gravité du volume du tétraèdre coïncide avec le centre de l'ellipsoïde, et chaque face du tétraèdre coupe le diamètre passant par le sommet opposé aux deux tiers de ce diamètre à partir du sommet. Enfin ces tétraèdres tous *maximum* sont en nombres infinis.

PROBLÈME XV.

Circonscrire à un tétraèdre l'ellipsoïde le plus petit.

Il serait superflu d'appliquer l'analyse à ce problème, qui est le réciproque du précédent : en effet, si le tétraèdre est un *maximum* relativement à l'ellipsoïde supposé constant, réciproquement l'ellipsoïde sera un *minimum*, quand le tétraèdre sera donné. Toutes les relations seront les mêmes, avec cette différence que l'ellipsoïde du plus petit volume sera unique.

Voici comment on peut trouver le rapport des volumes du tétraèdre et du parallélipipède rectangle des axes de l'ellipsoïde.

Soit $a^2b^2z^2+a^2c^2y^2+b^2c^2x^2=a^2b^2c^2$ l'équation de l'ellipsoïde rapportée à son centre et à ces demi-axes a, b, c. Concevons un tétraèdre inscrit, dont le sommet est à l'extrémité du demi-axe a, et dont la base devra être parallèle au plan des demi-axes b, c. Cette base devra passer de l'autre côté du centre à la distance $\frac{1}{3}a$. Faisant donc $x=\frac{1}{3}a$ dans l'équation ci-dessus, on aura $b^2z^2+c^2y^2=\frac{8}{9}b^2c^2$ pour l'équation de la section elliptique, qui contient la base du tétraèdre. Les deux demi-axes de cette section elliptique seront $b\sqrt{\frac{8}{9}}$ et $c\sqrt{\frac{8}{9}}$: l'aire de la base du tétraèdre sera (théorème VII) $\frac{8bc}{9}\cdot\frac{\sqrt{27}}{4}$ ou $\frac{2bc}{\sqrt{3}}$. Multipliant cette base par le tiers de la hauteur $\frac{4}{3}a$ du tétraèdre, on aura $\frac{8abc}{9\sqrt{3}}$ pour le volume du tétraèdre.

PROBLEME XVI.

Trouver une surface du deuxième degré qui touche neuf plans.

Soit

$$Az^2+A'y^2+A''x^2+Bzy+B'zx+B''xy+Cz+C'y+C''x+1=0 \ldots\ldots (1)$$

l'équation de la surface cherchée, il faut déterminer les neuf coëfficiens qu'elle renferme.

En faisant alternativement dans (1) $x=0$, $y=0$, $z=0$, on a les traces $Az^2+A'y^2+Bzy+Cz+C'y+1=0 \ldots\ldots (2)$,

$$Az^2+A''x^2+B'zx+Cz+C''x+1=0 \ldots\ldots (3),$$

$$A'y^2+A''x^2+B''xy+C'y+C''x+1=0 \ldots\ldots (4),$$

Ainsi en supposant que les trois plans coordonnés sont du nombre de ceux qui doivent être touchés par la surface cherchée, on exprimera ces trois conditions en écrivant que les traces (2), (3), (4) sont des points uniques ; ce qui (n.° 3) fournit ces trois équations.

$$(BC-2AC')^2=(B^2-4AA')(C^2-4A) \ldots\ldots (5)$$

ou $AC'^2-BCC'+B^2+A'C^2-4AA'=0$,

$$(B'C-2AC'')^2=(B'^2-4AA'')(C^2-4A) \ldots\ldots (6)$$

ou $AC''^2-B'CC''+B'^2+A''C^2-4AA''=0$,

$$(B''C'-2A'C'')^2=(B''^2-4A'A'')(C'^2-4A') \ldots\ldots (7)$$

ou $A'C''^2-B''C'C''+B''^2+A''C'^2-4A'A''=0$.

Soit $kz+hy+gx+1=0 \ldots\ldots (8)$ l'un des autres plans que doit toucher la surface : en substituant dans (1) la valeur de z tirée de (8), on a une équation de cette forme,

$$a'y^2+b'xy+c'x^2+d'y+e'x+f'=0,$$

et en posant $(b'd'-2a'e')^2=(b'^2-4a'c')(d'^2-4a'f')$

ou $a'e'^2+c'd'^2-b'd'e'+f'(b'^2-4a'c')=0$,

on exprime que le plan (8) est tangent à la surface (1). Cette dernière équation développée contient 156 termes qui se réduisent à 56. Par le moyen de (5), (6), (7) on en détruit encore 15, et finalement elle devient

$$\begin{aligned}&AB'^2+A'B''^2+A''B^2-BB'B''-4AA'A''+g[C'(BB'-2AB'')+C(BB''-2A'B')\\&-C''(B^2-4AA')]+h[C''(BB'-2AB'')+C(B'B''-2A''B)-C'(B'^2-4AA'')]\\&+k[C''(BB''-2A'B')+C'(B'B''-2A''B)-C(B''^2-4A'A'')]+gh[C''(BC-2AC')\\&-B''(C^2-4A)-B'(2B-CC')]+gk[C(B''C'-2A'C'')-B'(C'^2-4A')-B(2B''-C'C'')]\\&+hk[C'(B'C''-2A''C)-B(C''^2-4A'')-B''(2B'-CC'')]=0\ldots.(9).\end{aligned}$$

Puisque la surface doit toucher neuf plans, on aura cinq autres équations de la même forme que (9), en y remplaçant g, h, k par g_1, h_1, k_1, par g_2, h_2, k_2, par g_3, h_3, k_3 ......

Ainsi la question est ramenée à éliminer les neuf coëfficiens A, A′, A″, B, B′, B″, C, C′, C″ entre les équations (5), (6), (7) et six équations semblables à (9).

THÉORÈME XVII

sur la parabole.

M, M′ étant deux points quelconques d'une parabole, O le point de concours des tangentes en ces points, et F le foyer, on a toujours cette relation $\frac{\overline{MO}^2}{MF}=\frac{\overline{M'O}^2}{M'F}$; d'où il suit que si F tombe sur MM′, le sommet de l'angle O, qui devient droit, est placé sur la directrice, et la ligne OF est perpendiculaire sur la corde MM′.

Il suit de ce théorème que les deux triangles MFO, M′FO sont semblables, et que ang. MFO = ang. M′FO, ce qui est un second théorème démontré par *Simpson.*

J'ai annoncé ce théorème tom. IV pag. 60 des *Annales de Mathématiques* : on en trouve des démonstrations dans les cahiers suivans.

THÉORÈME XVIII

sur l'ellipse et l'hyperbole.

Les parallélogrammes qui ont respectivement pour diagonale deux diamètres conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole, et dont les côtés sont parallèles à deux autres diamètres conjugués, sont équivalens.

Démonstration. Soit x et y les coordonnées de l'extrémité d'un diamètre de l'ellipse ou de l'hyperbole, et x', y' celles de l'extrémité du diamètre conjugué, ces coordonnées étant parallèles à deux autres diamètres conjugués a, b, on aura d'abord

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2 \ldots\ldots (1), \quad a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2 \ldots\ldots (2).$$

On a ensuite cette relation connue, $b^2xx'=a^2yy' \ldots\ldots (3)$.

Maintenant la traduction du théorème proposé donne

$$xy=x'y' \ldots\ldots\ldots (4).$$

Il faut faire voir que (4) est comprise dans (1), (2), (3).

Pour cela je multiplie (3) par (4), et j'ai $bx=ay' \ldots\ldots (5)$.
Ensuite je divise (3) par (4), et j'ai $bx'=ay \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$.
En vertu de (5) et (6), les équations (1) et (2) deviennent identiquement les mêmes, et sont par conséquent satisfaites à-la-fois par (4) : donc le théorème exprimé par (4) est vrai.

Remarquons qu'en vertu de (5) et (6) les équations (1) et (2) deviennent $y^2+y'^2=b^2 \ldots\ldots (7)$, $x^2+x'^2=a^2 \ldots\ldots (8)$.

Ces équations (5), (6), (7), (8) sont autant de théorèmes qui, ainsi que (4), ont leur utilité pour la solution des problèmes : on en déduit encore cette autre relation $xy'+x'y=ab$. (V. les *annales* tom. 4, pag. 92 où j'ai proposé le théorème dont il s'agit).

Addition au n.° 14, pag. 16.

$z = f(x, y)$ étant l'équation d'une surface quelconque, si l'on pose $dz = pdx + qdy$; $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$, et si l'on fait pour abréger $g = rt - s^2$, $h = (1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t$, $k^2 = 1 + p^2 + q^2$, on trouve (application de l'analyse par *Monge* . . . pag. 112) que, pour le cas des coordonnées rectangulaires, le plus grand et le plus petit rayon de courbure d'un point quelconque, sont donnés par les deux valeurs de R, dans l'équation $g\mathrm{R}^2 + hk\mathrm{R} + k^4 = 0$ . . . (F).

Si après avoir différentié la valeur de R, on égale à zero les multiplicateurs de dx et dy, on aura deux équations en x et y dont l'élimination donnera pour x, y et ensuite z, des valeurs qui seront les coordonnées du pôle, si $z = f(x, y)$ est l'équation du paraboloïde: ces valeurs mises dans (F) feront connaître les deux valeurs de R qui sont les moitiés des paramètres de deux paraboles principales.

Autrement on pourra mettre dans (F) pour x et y les coordonnées α, β, du pôle, trouvés n.° 15.

Addition à la note 7, pag. 41.

Cette propriété caractéristique des diamètres principaux, des surfaces du second ordre, savoir, qu'ils sont perpendiculaires au plan tangent, peut fournir une solution analogue à celle exposée (note 7) pour les sections coniques : cette méthode quoique préférable à celle de la transformation des coordonnées, n'a cependant pas la simplicité du calcul différentiel.

ERRATA.

Page.	*ligne.*	*Au lieu de*	*lisez.*
11	2	$+A'B''^2$	$+A'B'^2$
11	5	$-2AB''$	$-2A'B'$
11	5	$-B'^2$	$-B''^2$
14	24	$2'BB''$	$2B'B''$
15	21	$r'=\frac{\sqrt{-b}}{3a}$	$r'=\sqrt{\frac{-b}{3a}}$
18	dernière	$+\sqrt{}$	$\pm\sqrt{}$
21	9	r'	r
22	2	$-ag,$	$-ag'$
22	12	$(q'''-q')$	$(q''-q')$
Id.	21	ou même	on mène.
26	3	$\gamma',$	γ'
31	22	$4f$	$4f.$
32	14	$4f$	$4f.$
72	23	$-4A'A'\beta^2$	$-4A'A''\beta^2$
80	22	$-4A'A'$	$-4A'A''$
5	1	sont	sont, ou non
[illegible]	18	a =	− a =
14	4	ne sont	sont ou ne sont
[illegible]	8	+ [illegible]	+ [illegible]

APPENDICE.

Dans le n.° 7 j'ai déduit de l'équation (α) n.° 2, qui donne les diamètres principaux de l'ellipse, l'équation (7) n.° 7 qui exprime le paramètre de la parabole; l'analogie faisait désirer de déduire aussi de l'équation (8) n.° 10, qui donne les trois demi-diamètres principaux de l'ellipsoïde, une équation qui donnât les paramètres des deux paraboles principales du paraboloïde. Pendant qu'on imprimait cet ouvrage, j'ai enfin trouvé cette équation remarquable qui complète ma théorie, et qui fait suite aux numéros 17 et 25.

Pour abréger, j'écris, ainsi qu'il suit, l'équation (8) n.° 10:

$$Dr^6 + GNr^4 - 4G^2Pr^2 - 4G^3Q = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Soient r' et r'' deux demi-diamètres principaux de l'ellipsoïde, et $2f$ le demi-paramètre du demi-diamètre r', on aura les trois équations,

$$Dr'^6 + GNr'^4 - 4G^2Pr'^2 - 4G^3Q = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2),$$

$$Dr''^6 + GNr''^4 - 4G^2Pr''^2 - 4G^3Q = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3),$$

$$r''^2 = 2fr' \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

On peut, en éliminant r', r'' de ces trois équations, en obtenir une qui donne tous les paramètres $4f$ de l'ellipsoïde : en exprimant que l'ellipsoïde dégénère en paraboloïde, c'est-à-dire en faisant $D=0$, on aurait l'équation que nous cherchons; mais cette marche est très-pénible, parce que l'équation finale en f est du 16.e degré, et embarrassée de racines étrangères : une observation simple prévient tous les embarras.

Dans le cas du paraboloïde, on a $D=0$, et la quantité G (voyez le n.° 9 et la notation du n.° 15) devient infinie; mais, en même tems, r' est aussi infinie : il s'ensuit que les deux derniers termes de l'équation (2) sont nuls à l'égard des deux premiers qui sont du même ordre, en sorte qu'elle devient

$$Dr'^2 + GN = 0 \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Si l'on met dans (3) pour r''^2 sa valeur $2fr'$ tirée de (4), elle devient,

$$8Df^3r'^3 + 4GNf^2r'^2 - 8G^2Pfr' - 4G^3Q = 0 \quad \ldots\ldots \quad (6),$$

dans laquelle, par la même raison que ci-dessus, le premier terme est nul à l'égard des trois derniers qui sont du même ordre : ainsi elle se réduit à

$$Nf^2r'^2 - 2GPfr' - G^2Q = 0 \quad \ldots\ldots \quad (7).$$

Je fais pour abréger $\frac{(bd-2ae)^2}{-16^2A^2a} = H$, et la valeur de G devient $G = \frac{H}{D}$, ce qui change (5) et (7) en $D^2r'^2 + HN = 0 \quad \ldots\ldots \quad (8)$,

$$D^2Nf^2r'^2 - 2DHPfr' - H^2Q = 0 \quad \ldots\ldots \quad (9).$$

Éliminant r' entre (8) et (9), il vient,

$$N^4 f^4 + 2NH(NQ + 2P^2) f^2 + H^2 Q^2 = 0 \ldots (10)$$

dont les deux racines $4f'$, $4f''$ sont les paramètres cherchés du paraboloïde.

Dans le cas du cylindre parabolique on a $H = 0$, $N = 0$: la formule (10) donnerait $f' = \frac{1}{0}$ et $f'' = \frac{0}{0}$, valeur dont on ne peut ici fixer l'indétermination : mais le cylindre parabolique étant aussi une variété du cylindre elliptique, on peut déduire son paramètre $4f_{,}$ de l'équation

$$Nr^4 - 4GPr^2 - 4G^2 Q = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (11),$$

qui donne les deux demi-axes de la base du cylindre elliptique (V. n.° 22), et dans laquelle $G = \frac{d^2 - 4af}{16Aa}$ (expression plus simple que celle du n.° 21).

En effet, on a d'abord $Nr'^4 - 4GPr'^2 - 4G^2Q = 0 \ldots\ldots\ldots (12)$,

$Nr''^4 - 4GPr''^2 - 4G^2Q = 0 \ldots\ldots (13)$, $r''^2 = 2f_{,}r' \ldots\ldots (14)$;

puis, par l'élimination de r'', (13) devient $Nf_{,}^2 r'^2 - 2GPf_{,}r' - G^2Q = 0 \ldots (15)$.

Le dernier terme dans (12), et le premier dans (15) sont nuls à l'égard des autres, et elles deviennent $Nr'^2 - 4GP = 0$, $2Pf_{,}r' + GQ = 0$, et par l'élimination de r' on a $16f_{,}^2 = \frac{GNQ^2}{P^3} \ldots\ldots\ldots (16)$.

Il reste à trouver la valeur de $NG = \frac{0}{0}$: à cause de $a = 0$ on a $G = \frac{d^2}{16Aa}$: il faut des équations, $B^2 - 4AA' = a$, $B'^2 - 4AA'' = c$, $2(BB' - 2AB'') = b$, $b^2 = 4ac$, $bd - 2ae = 0$ ou $b = \frac{2ae}{d}$, éliminer A'' et B'' dans la valeur de N, ainsi que b et c : alors a disparaît de lui-même dans NG, dont la valeur est donnée par

$$64A^3.NG = d^2(4A^2 + B'^2 - 4AB'\cos\varepsilon') + e^2(4A^2 + B^2 - 4AB\cos\varepsilon)$$
$$+ 2de(-BB' + 2AB'\cos.\varepsilon + 2AB\cos.\varepsilon' - 4A^2\cos.\varepsilon'') \text{ : ou (*)}$$

mettant cette valeur de NG dans (16), on aura $f_{,}$.

Dans le cas où la proposée représente deux plans parallèles, on a a, b, c, d, e, N, D, égaux à zéro ; l'équation (8) n.° 10 devient $Pr^2 + GQ = 0$, d'où, à cause de $G = \frac{-f}{4A}$, on tire $2r = \sqrt{\frac{Qf}{-AP}}$; c'est la plus courte distance $2r$ entre les deux plans parallèles (V. n.° 32).

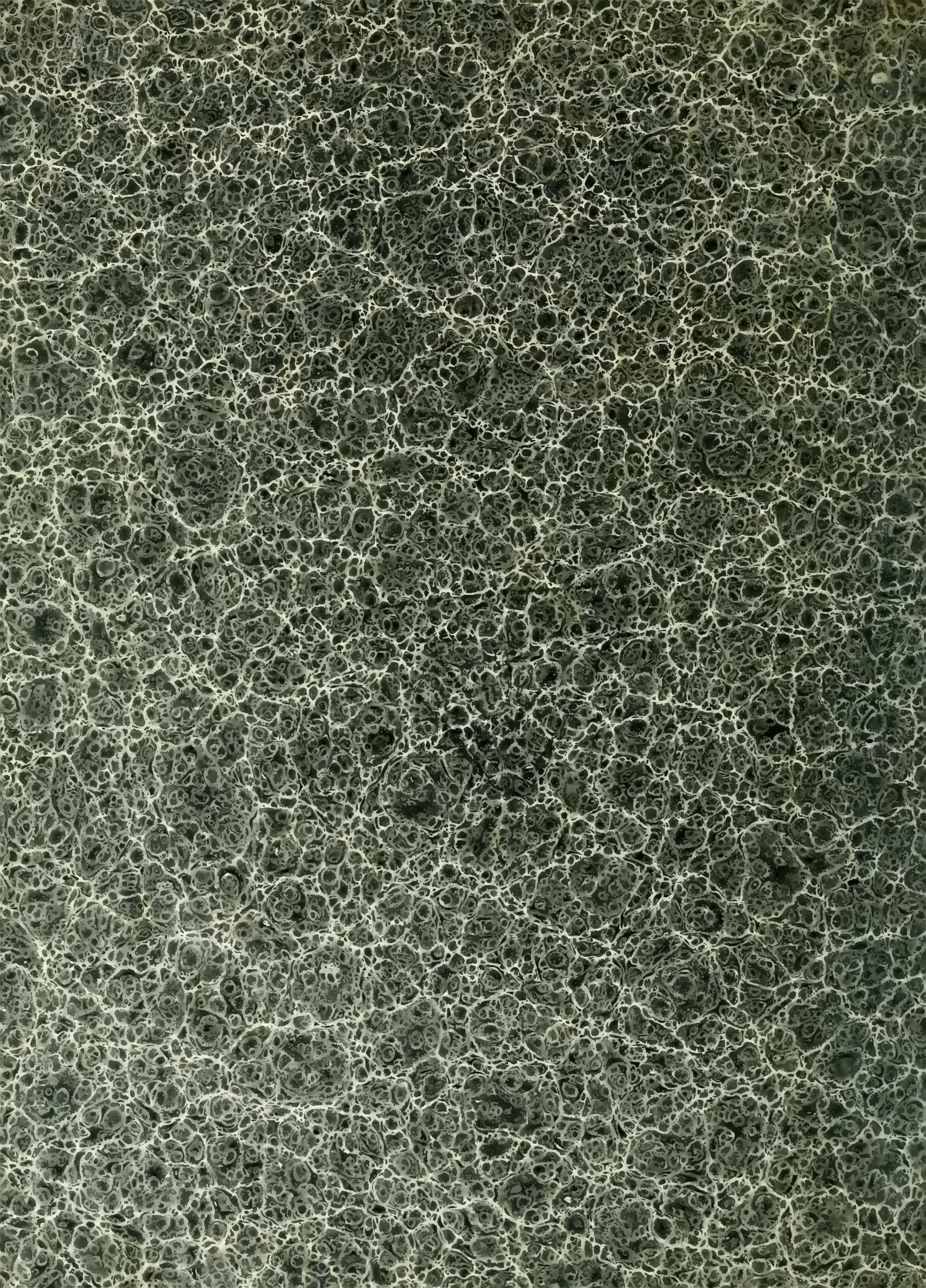
De même, si la proposée à deux variables représente deux droites parallèles (n.° 8), en faisant dans l'équation (α) n.° 2, $B^2 = 4AC$, et $G = \frac{4AF - D^2}{4A}$, elle donne pour la plus courte distance $2r$, entre les deux parallèles,

$$2r = \sin.\varepsilon. \sqrt{\frac{D^2 - 4AF}{A(A + C - B\cos.\varepsilon)}}.$$

Ainsi les résultats pour les courbes et surfaces non fermées se déduisent de ceux obtenus pour les lignes et surfaces fermées.

(*) $NG = C^2(A' + A'') + C'^2(A + A'') + C''^2(A + A') - BCC' - B'CC'' - B''C'C'' + [C''(B''C + B'C' - BC'') - 2A''CC']\cos.\varepsilon$
$+ [C'(B''C + BC'' - B'C') - 2A'CC'']\cos.\varepsilon' + [C(B'C' + BC'' - B''C) - 2AC'C'']\cos.\varepsilon''$,






002302915047

